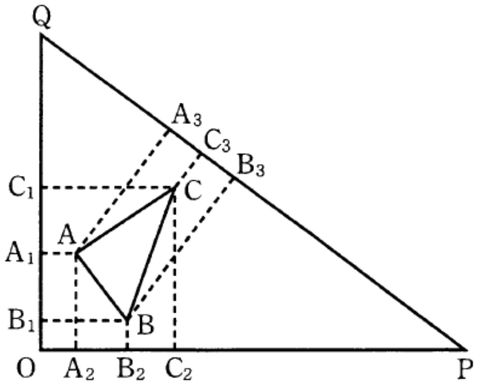
数学演習(河野) 確認テスト 冬期No．２ Ａ－Type

第１問（センター試験・本試験・平成１７年）

座標平面上の３点O(0，0)，P(4，0)，Q(0，3)を頂点とする三角形OPQの内部に三角形ABCがあるとする。A，B，Cから直線OQに引いた垂線とOQとの交点をそれぞれA_1，B_1，C_1とする。A，B，Cから直線OPに引いた垂線とOPとの交点をそれぞれA_2，B_2，C_2とする。A，B，Cから直線PQに引いた垂線とPQとの交点をそれぞれA_3，B_3，C_3とする。

A_1が線分B_1C_1の中点であり，B_2が線分A_2C_2の中点であり，C_3が線分A_3B_3の中点であるとする。



$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$とおく。$A_1$が線分$B_1C_1$の中点であるから$w=\boxed{\text{ア}}\,y$である。$B_2$が線分$A_2C_2$の中点であるから$z=\boxed{\text{イ}}\,x$である。線分ABの中点をDとすると，$C_3$が線分$A_3B_3$の中点であるから

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ウ}}$$

である。また

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}\right),\ \overrightarrow{CD}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{AC}\right)$$

であるから

$$y = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\, x$$

である。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = x\left(1,\ \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = x\left(\boxed{\text{イ}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。ゆえに

$$\mathrm{AC} = \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\mathrm{AB},\quad \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第２問（センター試験・本試験・平成１８年）

平面上の三つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b} \cdot \vec{c} > 0$ であるとする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。また

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$2\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}$°である。

(2) ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$$\vec{c} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\vec{a} + \boxed{\text{ケ}}\,\vec{b}\right)$$

である。

(3) x，y を実数とする。ベクトル $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{c}$ が

$$0 \leqq \vec{p} \cdot \vec{a} \leqq 1,\quad 0 \leqq \vec{p} \cdot \vec{b} \leqq 1$$

を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{\text{コ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{サ}},\quad x \leqq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,y \leqq x + \boxed{\text{ス}}$$

である。x と y が上の範囲を動くとき，$\vec{p} \cdot \vec{c}$ は最大値 $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ をとり，この最大値をとるときの $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと

$$\vec{p} = \boxed{\text{ソ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{タ}}\,\vec{b}$$

である。

解答欄　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　（＿＿＿＿／４０点）

大問１（＿＿＿＿点／２０点）

問1			
ア		シ	
イ		ス	
ウ		セ	
エ		ソ	
オ		タ	
カ		チ	
キ		ツ	
ク		テ	
ケ		ト	
コ		ナ	
サ		ニ	

大問２（＿＿＿＿点／２０点）

問2			
ア		シ	
イ		ス	
ウ		セ	
エ		ソ	
オ		タ	
カ			
キ			
ク			
ケ			
コ			
サ			

正解

大問１（　　　　点／２０点）

$\text{ア}\,y$	$-y$	2
$\text{イ}\,x$	$2\,x$	2
ウ	0	2
(エオ, カ)	$(-4,\ 3)$	2
$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\text{ケ}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}})$	$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\,\overrightarrow{\mathrm{AC}})$	2
$\dfrac{\text{コサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{-4}{3}$	3
$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\dfrac{4}{3}$	2
$\dfrac{\text{ソ}\sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{2\sqrt{13}}{5}$	2
$\dfrac{\sqrt{\text{テト}}}{\text{ナニ}}$	$\dfrac{\sqrt{13}}{65}$	3

大問２（　　　　点／２０点）

$\dfrac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$	$\dfrac{-1}{2}$	3
$\sqrt{\text{エ}}$	$\sqrt{3}$	3
オカ°	90°	3
$\dfrac{\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}(\vec{a}+\text{ケ}\vec{b})$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$	3
コ	0	1
サ	1	1
$\sqrt{\text{シ}}$	$\sqrt{3}$	1
ス	2	1
$\sqrt{\text{セ}}$	$\sqrt{3}$	2
$\text{ソ}\vec{a}+\text{タ}\vec{b}$	$2\vec{a}+2\vec{b}$	2