ベクトルの基本概念

2007 年 12 月 14 日（金）

河野　愛一朗

＝はじめに＝

　本項では，ミクロ経済学で重要であるが，理解されにくい数学の単元であるベクトルの基本概念を説明する．著者は，本項執筆の際に，６冊ほどの数学・経済数学の本を参照したが，どれもベクトルについては満足のいく説明はなされていなかった．さらに，高校時代の数学Ｂ[1]でもベクトルは習うが，あれは物理学で使用するベクトルの概念であり，経済学ではあまり使えない．この単元における目標は，経済学で使える「ベクトルとは何か？」を理解すること以外，他ならない．皆さんがその目標を達成されることを期待している．

＝目次＝

1 平面ベクトル・空間ベクトルともに，2007 年度現在の新旧課程双方で，数学Ｂに掲載されている．

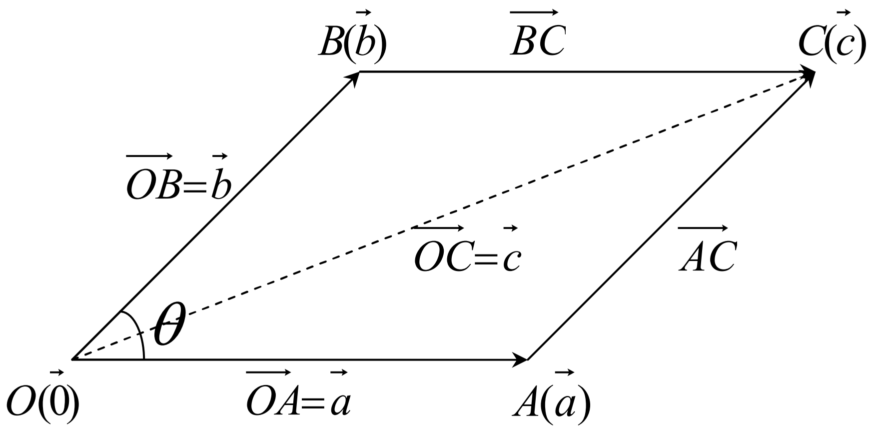
１．　ベクトルの定義

１．１　高校数学のベクトルの復習（物理学でのベクトル）

高校数学の教科書では，ベクトル(Vector)について以下のように書いている．

・大きさと向きを持った量（定義）
・平面上や空間内の矢印（有向線分[2]）として幾何学的にイメージされる．

そこで，これらを下の図で説明しよう．四角形ＯＡＣＢは平行四辺形であるとする．



= Figure 1 =

ベクトルの定義は先ほど述べたように，大きさと向きを持った量である．ベクトル（や行列）以外の数（これをスカラー，scalar という）はこのうち大きさしか表していなかった．例えば，もしＯＢ＝ＯＡとすれば，スカラーでは当然ながら，ＯＢとＯＡは同じものだが，ベクトルではこの二つは明らかに向きが異なるので違うものになる．しかし，ベクトルの世界であっても，大きさに加え，向きが同じであれば，同じ場所に存在しなくても，同じものとすることができる．例えば，ＯＢとＡＣは大きさが同じだが，$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AC}$で考えたとき，方向も同じだから，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$とすることができる．

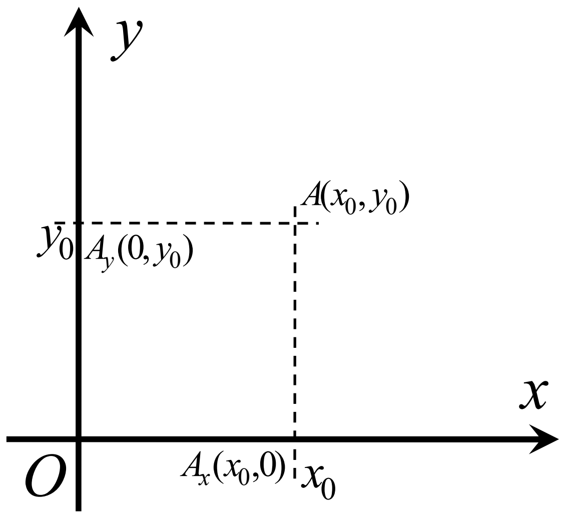
[2] 有向線分とは，向きを持った線分のこと．

１．２　新たなベクトル（経済学で使えるベクトル）

１．１のような物理学的なベクトルに対して，経済学を学習するものはベクトルを以下のように考えれば良い．

・同時に達成するいくつかの値の集合[3]
・値の組み合わせ[3]

そこで，経済学では座標平面を頻繁に用いて分析するので，以下のようなｘｙ平面[4]の図を用いて説明しよう．



= Figure 2 =

結論からいうと，上の図では，x_0, y_0はスカラーであり，O, A, A_x, A_yがベクトルである．経済学でスカラーといえば，単に値そのものを指す．現にx_0, y_0それぞれx, yの値に他ならない．しかし，O, A, A_x, A_yは座標平面上の点であり，それぞれ，$(0,0), (x_0, y_0), (x_0, 0), (0, y_0)$を意味している．まさに，値の組み合わせといえるので，これらはベクトルである．例えば，$A(x_0, y_0)$について考えよう．ベクトルAにおいては，$x = x_0$だけでなく，同時に$y = y_0$も達成されていなければ

---

[3] この意味では，行列もベクトルと同じ．ベクトルは行列の一種ともいえる．

[4] ｘｙ平面とは，横軸にｘの値，縦軸にｙの値をとるような座標平面のこと．もし，ｙｘ平面といえば，縦軸にｙ，横軸にｘとなる．ちなみに，変数が３つ以上になり，ｘｙｚ立方とは，ｘｙ平面に対し，垂直にｚ軸を立てるようなグラフになる．

ならない．複数の数の値を１つのスカラーでは表示できないが，ベクトルは数を組み合わせることができるので，こうした状態を１つのベクトルという数で表すことができるのである．また，A_xも，れっきとしたベクトルである．確かに，yの値は０だが，０という数（値）と$x=x_0$をまとめているわけなので，やはりベクトルに他ならない[5]．原点Ｏも同様である[6]．１．１のようにベクトルには必ずしも→をつけなくても良い．特に，経済学ではほとんど使用しない．以降，本書でベクトルと呼んだ場合，こちら（１．２）のベクトルを指すものとする．

２．　これまでの数とベクトルの違い

これまでの数であるスカラーはその値自体にしか情報が存在しないが，１．２でも述べたように，ベクトルは，数の組み合わせであるので，複数の値がもつ情報を取り入れることができる．その際，いくつかの数値を取り入れるときに，（　）でくくるが，その際，(x_0, y_0)のように横に並べてもいいし，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$のように縦に並べてもいい．前者を行ベクトル(row vector)，後者を列ベクトル(column vector)と呼ぶ.

[5] ちなみに，A_xやA_yのように，ベクトルを構成する数値のひとつを除いて全てが０であるようなベクトルを基本ベクトルという．
[6] ベクトルを構成する数値が全て０であるベクトルを零ベクトルという．

３．　ベクトルの取り扱いで注意すべきこと

ベクトルの取り扱いの際に，最も注意すべきなのは演算である．ベクトルは数の集合体なのだから，ベクトルに対して，演算を行う際には，以下の３点などに注意すべきである．

（１）ベクトルの全ての構成要素[7]に対して，演算を行うこと．その際，各成分が**対応している**か，確認すること．
（２）スカラーでの演算規則と同じようにはいかないこと．
（３）そもそも演算の際に，その演算に意味があるのか，その成分に演算を行うことに意味があるのかに意識すること．

例えば，Ａ社が保有している労働（Ｌとする）と資本（Ｋとする）といった生産要素をベクトルF_Aとしよう．Ａ社が実際に労働をL_A，資本をK_A[8]持っていれば，このベクトルは$F_A=(L_A, K_A)$と表される．同様にＢ社が存在し，$F_B=(L_B, K_B)$であるとしよう．ここで，Ａ社とＢ社が合併した場合，それぞれが持っていた生産要素が合計される．この合計の表し方は２通り存在する．従来のスカラーで表すなら，資本$K=K_A+K_B$，労働$L=L_A+L_B$となる．但し，２回の表示をしなくてはならない．対して，ベクトルで表そう．すると，生産要素の合計はF_A+F_Bと表せる．このとき，その成分は，労働成分と資本成分がそれぞれ左と右の成分になっており**対応していて**[9]，それぞれ足し合って，$(L_A, K_A)+(L_B, K_B)=(L_A+L_B, K_A+K_B)$となっている．つまり，ベクトル$F_A+F_B$は$(L_A+L_B, K_A+K_B)$で生産要素を１つのベクトルという数でに表すことができた．

以上の例は各成分を足し合い，ベクトルの演算を行ったケースであった．このように，四則演算のうち足し算・引き算はそのままできる．しかし，掛け算・割り算になると，そうもいかない．

---

7 これを成分(element)と言う．たとえば，Figure2 では，ベクトルＡにおいて，x_0はｘ成分，y_0はｙ成分と呼ぶことができる．

8 資本と労働は代表的な生産要素．

9 例えば，ベクトルF_Aが(L_A, K_A)でベクトルF_Bが(K_B, L_B)であれば，左右の成分が全く質の異なるものであり，このような場合にベクトルの和算を施しても（それ自体は可能であるが），意味がない．

例えば，経済に財が３種類あるとしよう．財の種類 $i=1,2,3$ であり，価格を p_i，生産量を q_i と表す．財の価格をベクトルＰとし，第１成分[10]から順に第１財，第２財…の価格を並べる．同様に，生産量もベクトルＱとして並べる．すると，Ｐ(p_1,p_2,p_3)，Ｑ(q_1,q_2,q_3)と表せた．このとき，この経済の総生産額を表すにはどうすればよいか？総生産額は，$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$ である．これは，ベクトルでの演算ではＰＱなのか，というとこれは違う．なぜなら，ベクトルは行列の一種で，Ｐの列数とＱの行数が一致する必要があるが，前者は１で後者は３なので，このままでは計算ができない．そこで，ベクトルの積の計算では，しばしば，転置(transpose)という作業を実施する．これは，列数と行数をそろえるために，ベクトルを回転させる．具体的にはＱを回転させて，$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$[11]と表せる．これで，列数と行数が一致したので，ＰＱが計算できる．$(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$ となって，求めたいものが求められた．なお，同様に転置してＱＰをしたらどうなるか？$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} p_1q_1 & p_2q_1 & p_3q_1 \\ p_1q_2 & p_2q_2 & p_3q_2 \\ p_1q_3 & p_2q_3 & p_3q_3 \end{pmatrix}$となり，全く結果が異なる．また，この行列が何を表しているのかも分からない．このように，ベクトルの掛け算・割り算の際には要注意だし，演算自体に意味があるのか，よく考えなければならない．

４．　参考文献（References・Bibliography）

Michael W. Klein(1997)，MATHEMATICAL METHODS for ECONOMICS，ADDISON WESLEY

伊藤敏雄(2004)，「現代物理」，学術図書出版社

沢田賢(2003)，「社会科学の数学」，朝倉図書

---

10 行ベクトルなら左から，列ベクトルなら上から，第１成分，第２成分，…と呼ぶ．

11 このように回転させられたベクトルや行列には，Q^T というふうに“T”をつける．