今日の要点『ベクトルの基本概念』

※文系は一部不要な部分があるから注意すること

1　ベクトルの基本概念

＝はじめに＝

　本項では，重要であるが理解されにくい数学の単元であるベクトルの基本概念を説明する．著者は，本項執筆の際に，６冊ほどの数学の本を参照したが，どれもベクトルについては満足のいく説明はなされていなかった．基本的に，高校教科書の数学Ｂで掲載されているベクトルは物理学の力学でのみ通用する話が中心となっており，他の分野ではあまり使えない．この単元における目標は，普遍的な意味での「ベクトルとは何か？」を理解すること以外，他ならない．皆さんがその目標を達成されることを期待している．

＝目次＝

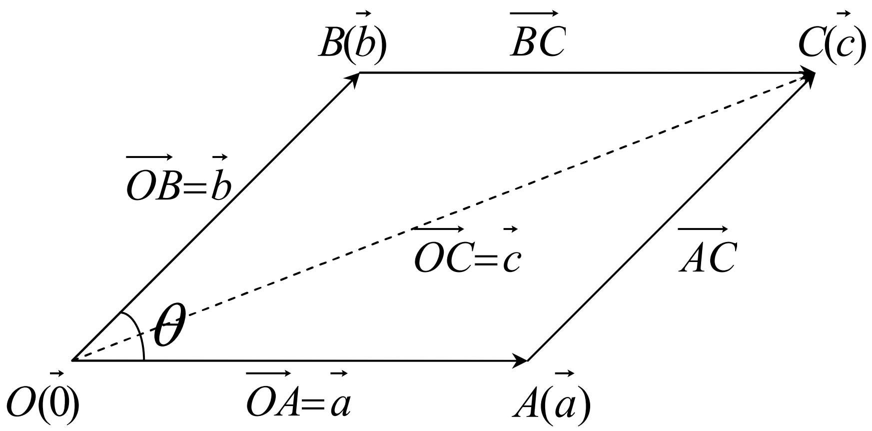
１．　ベクトルの定義

１．１　高校数学のベクトル（物理学でのベクトル）

高校数学の教科書では，ベクトル(Vector)について以下のように書いている．

・大きさと向きを持った量（定義）
・平面上や空間内の矢印（有向線分[1]）として幾何学的にイメージされる．

そこで，これらを下の図で説明しよう．四角形ＯＡＣＢは平行四辺形であるとする．



= Figure 1 =

ベクトルの定義は先ほど述べたように，大きさと向きを持った量である．ベクトル（や行列）以外の数（これをスカラー，scalar という）はこのうち大きさしか表していなかった．例えば，もしＯＢ＝ＯＡとすれば，スカラーでは当然ながら，ＯＢとＯＡは同じものだが，ベクトルではこの二つは明らかに向きが異なるので違うものになる．しかし，ベクトルの世界であっても，大きさに加え，向きが同じであれば，同じ場所に存在しなくても，同じものとすることができる．例えば，ＯＢとＡＣは大きさが同じだが，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}$で考えたとき，方向も同じだから，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$とすることができる．

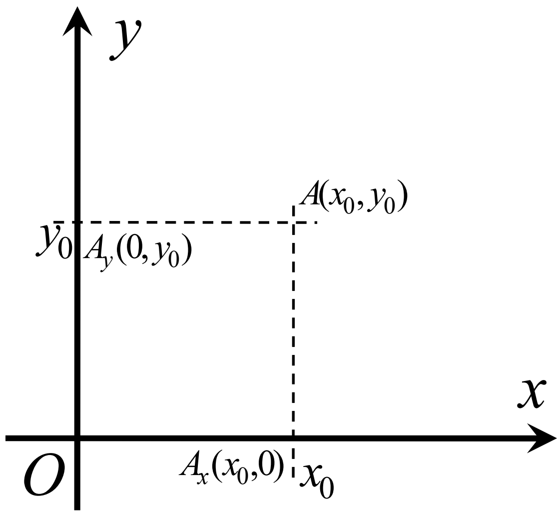
[1] 有向線分とは，向きを持った線分のこと．

１．２　新たなベクトル（普遍的な意味でのベクトル）

１．１のような物理学的なベクトルに対して，普遍的な意味でのベクトルは以下のように考えれば良い．

・同時に達成するいくつかの値の集合[2]
・値の組み合わせ[3]

そこで，座標平面を頻繁に用いて分析するので，以下のようなｘｙ平面[3]の図を用いて説明しよう．



= Figure 2 =

結論からいうと，上の図では，x_0, y_0はスカラーであり，O, A, A_x, A_yがベクトルである．スカラーといえば，単に値そのものを指す．現にx_0, y_0それぞれx, yの値に他ならない．しかし，O, A, A_x, A_yは座標平面上の点であり，それぞれ，$(0,0), (x_0, y_0), (x_0, 0), (0, y_0)$を意味している．まさに，値の組み合わせといえるので，これらはベクトルである．例えば，$A(x_0, y_0)$について考えよう．ベクトルAにおいては，$x = x_0$だけでなく，同時に$y = y_0$も達成されていなければならない．複数の数の値を１つのスカラーでは表示できないが，ベクトルは数を組み合わ

---

[2] この意味では，行列もベクトルと同じ．ベクトルは行列の一種ともいえる．
[3] ｘｙ平面とは，横軸にｘの値，縦軸にｙの値をとるような座標平面のこと．もし，ｙｘ平面といえば，縦軸にｙ，横軸にｘとなる．ちなみに，変数が３つ以上になり，ｘｙｚ立方とは，ｘｙ平面に対し，垂直にｚ軸を立てるようなグラフになる．

せることができるので，こうした状態を１つのベクトルという数で表すことができるのである．また，A_xも，れっきとしたベクトルである．確かに，yの値は０だが，０という数（値）と$x=x_0$をまとめているわけなので，やはりベクトルに他ならない[4]．原点Ｏも同様である[5]．１．１のようにベクトルには必ずしも→をつけなくても良い．以降，本書でベクトルと呼んだ場合，こちら（１．２）のベクトルを指すものとする．

２．　<u>これまでの数とベクトルの違い</u>

　これまでの数であるスカラーはその値自体にしか情報が存在しないが，１．２でも述べたように，ベクトルは，数の組み合わせであるので，複数の値がもつ情報を取り入れることができる．その際，いくつかの数値を取り入れるときに，(　)でくくるが，その際，(x_0, y_0)や$(x_0\ y_0)$のように横に並べてもいいし，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$のように縦に並べてもいい．前者を行ベクトル(row vector)，後者を列ベクトル(column vector)と呼ぶ．

３．　<u>ベクトルの取り扱いで注意すべきこと（文系は大学入試では不要）</u>

　ベクトルの取り扱いの際に，最も注意すべきなのは演算である．ベクトルは数の集合体なのだから，ベクトルに対して，演算を行う際には，以下の３点などに注意すべきである．

（１）ベクトルの全ての構成要素[6]に対して，演算を行うこと．その際，各成分が<u>対応している</u>か，確認すること．

---

4 ちなみに，A_xやA_yのように，ベクトルを構成する数値のひとつを除いて全てが０であるようなベクトルを基本ベクトルという．

5 ベクトルを構成する数値が全て０であるベクトルを零ベクトルという．

6 これを成分(element)と言う．たとえば，Figure2 では，ベクトルＡにおいて，x_0はｘ成分，y_0はｙ成分と呼ぶことができる．

（２）スカラーでの演算規則と同じようにはいかないこと.
（３）そもそも演算の際に，その演算に意味があるのか，その成分に演算を行うことに意味があるのかに意識すること.

例えば，Ａ社が保有している労働（Ｌとする）と資本（Ｋとする）といった生産要素をベクトルF_Aとしよう．Ａ社が実際に労働をL_A，資本をK_A[7]持っていれば，このベクトルは$F_A=(L_A, K_A)$と表される．同様にＢ社が存在し，$F_B=(L_B, K_B)$であるとしよう．ここで，Ａ社とＢ社が合併した場合，それぞれが持っていた生産要素が合計される．この合計の表し方は２通り存在する．従来のスカラーで表すなら，資本$K=K_A+K_B$，労働$L=L_A+L_B$となる．但し，２回の表示をしなくてはならない．対して，ベクトルで表そう．すると，生産要素の合計はF_A+F_Bと表せる．このとき，その成分は，労働成分と資本成分がそれぞれ左と右の成分になっており**対応していて**[8]，それぞれ足し合って，$(L_A, K_A)+(L_B, K_B)=(L_A+L_B, K_A+K_B)$となっている．つまり，ベクトル$F_A+F_B$は$(L_A+L_B, K_A+K_B)$で生産要素を１つのベクトルという数で表すことができた.

以上の例は各成分を足し合い，ベクトルの演算を行ったケースであった．このように，四則演算のうち足し算・引き算はそのままできる．しかし，掛け算・割り算になると，そうもいかない.

例えば，経済に財が３種類あるとしよう．財の種類 $i=1,2,3$ であり，価格をp_i，生産量をq_iと表す．財の価格をベクトルＰとし，第１成分[9]から順に第１財，第２財…の価格を並べる．同様に，生産量もベクトルＱとして並べる．すると，$P(p_1,p_2,p_3)$，$Q(q_1,q_2,q_3)$と表せた．このとき，この経済の総生産額を表すにはどうすればよいか？総生産額は，$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$ である．これは，ベクトルでの演算ではＰＱなのか，というとこれは違う．なぜなら，ベクトルは行列の一種で，Ｐの列数とＱの行数が一致する必要があるが，前者は１で後者は３なので，このままでは計算ができない．そこで，ベクトルの積の計算では，しばしば，転置(transpose)という作業を実施する．これは，列数と行数をそろえるために，

---

7 資本と労働は代表的な生産要素.
8 例えば，ベクトルF_Aが(L_A, K_A)でベクトルF_Bが(K_B, L_B)であれば，左右の成分が全く質の異なるものであり，このような場合にベクトルの和算を施しても（それ自体は可能であるが），意味がない.
9 行ベクトルなら左から，列ベクトルなら上から，第１成分，第２成分，…と呼ぶ.

ベクトルを回転させる．具体的にはＱを回転させて，$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$[10]と表せる．これで，

列数と行数が一致したので，ＰＱが計算できる．$(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$

となって，求めたいものが求められた．なお，同様に転置してＱＰをしたらどうなるか？$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}(p_1,p_2,p_3) = \begin{pmatrix} p_1q_1 & p_2q_1 & p_3q_1 \\ p_1q_2 & p_2q_2 & p_3q_2 \\ p_1q_3 & p_2q_3 & p_3q_3 \end{pmatrix}$となり，全く結果が異なる．また，この行列が何を表しているのかも分からない．このように，ベクトルの掛け算・割り算の際には要注意だし，演算自体に意味があるのか，よく考えなければならない．

[10] このように回転させられたベクトルや行列には，Q^Tというふうに“T”をつける．

$\boxed{2}$　ベクトルの基本性質

＝目次＝

１．行ベクトル，列ベクトル

ベクトルは以下の２つに分けることができる．

・1 行のみからなる行列　＝　行ベクトル
・1 列のみからなる行列　＝　列ベクトル

ベクトルをあらわすときは，アルファベットの小文字の太字を用いることが多い．

◆ **n 次行ベクトル，m 次列ベクトル**

n 次行ベクトルとは，$1\times n$ 行列のことである．

例えば，$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$　と表される．

また，m 次列ベクトルとは，$m\times 1$行列のことである．

よって，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$　と表される．

２．ベクトルの演算

行列の演算と同じである.

ベクトルの演算

行列の演算と同じである.
n 次行ベクトル **a,b,c**，実数 u，v に対し，以下の(1)～(8)が成立する.

(1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

(2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(3) $\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

(4) $u(v\mathbf{a})=(uv)\mathbf{a}$

(5) $(u+v)\mathbf{a}=u\mathbf{a}+v\mathbf{a}$

(6) $u(\mathbf{a}+\mathbf{b})=u\mathbf{a}+u\mathbf{b}$

(7) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

(8) $0\mathbf{a}=0$

以上は， **a,b,c** が n 次列ベクトルであっても成立する.

◆ ベクトルの積　（文系は大学入試では不要）

２つの行列 A，B に対し，その積 AB を定義するのは「**行列 A の列の個数＝行列 B の行の個数」**となる場合に限られていた．ベクトルに関しても同様のことが言える．m 次列ベクトル **b** の列の個数も，n 次行ベクトル **a** の行の個数は共に 1 である．よって，m 次列ベクトル **b**，n 次行ベクトル **a** に対し，その積 **ba** は定義される(**ba** は m×n 行列である)．m=n のとき，n 次行ベクトル **a**，m 次列ベクトル **b** に対し，その積 **ab** は定義される．この **ab** は 1×1 行列，すなわちスカラーである.

$\boxed{\text{例：2 次行ベクトル}\mathbf{a}\text{，2 次列ベクトル}\mathbf{b}}$

$\mathbf{a} = (3,4)$， $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ とあらわされるとき， $\mathbf{ba}$， $\mathbf{ab}$ はどうなるか.

$\mathbf{ba}$ は 2×2 行列， $\mathbf{ab}$ はスカラー (1×1 行列)になる.

（結果） $\mathbf{ba} = \begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$ $\mathbf{ab} = (3 \cdot 9 + 4 \cdot 7) = (55)$

３．1 次結合

n 個のベクトル

$\mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が与えられたとき，n 個の実数

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に対して

$\alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots \alpha_n \mathbf{a}_n$ の形にかかれるベクトルを $\mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合という.

例：2 個のベクトル

$\mathbf{a_1} = (1,2,3)$
$\mathbf{a}_2 = (4,5,6)$ が与えられたとき，2 個の実数

α_1, α_2 に対して

$$\alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = (1\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + 6\alpha_2)$$

の形にかかれるベクトルを $\mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合という.

４．１次独立，１次従属

ベクトル$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$に対して
$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots \alpha_n\mathbf{a}_n = 0$が成り立つのは
n 個の実数$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$が
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$の場合に限るとき，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$は 1 次独立であるという．
1 次独立でないとき，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$は 1 次従属であるという．

例：３個のベクトル

$\mathbf{a}_1 = (1,2,3)$
$\mathbf{a}_2 = (4,5,6)$　に対して、
$\mathbf{a}_3 = (7,8,9)$

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = (1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3) = 0$$

これが成り立つのは、
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$の場合に限らないかどうかを確かめる。

そのためには、

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0) \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases}$$
を解けばよい。

しかし、これは解くことができない（そもそも１次従属だから）。

ここで $\alpha_1 = a$ とおくと、
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = (a, -2a, a)$ $(a \in \Re)$ となるので、
例えば、$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$　のときでも
$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = (1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3) = 0$$
が成り立つ。

よって、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$は１次従属であるであることが確かめられた。

◆ 1次独立であることは何を意味するのか

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

上記のような連立方程式があるとする。

このとき、この連立方程式が一意の解を持つかどうかは各方程式の係数をベクトルとした、

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n = (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}) \end{cases}$$ が1次独立ならば、

一意の解を持たないし、1次従属ならば、持たないといえる。

例：３元連立方程式

$$\begin{pmatrix} x + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{pmatrix}$$ がある。

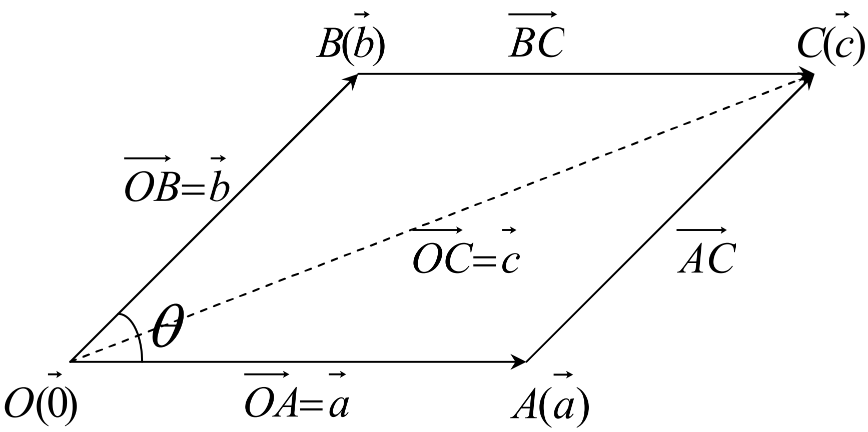
この連立方程式は一意の解を持つだろうか。それを調べるには、各方程式の係数をベクトルとして、それらが1次独立であるかどうかを確かめればよい。

そこで、$\mathbf{a_1} = (1,2,3), \mathbf{a}_2 = (4,5,6), \mathbf{a}_3 = (7,8,9)$ とする。

既に例示したように、$\mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は1次従属である。よって、一意の解を持たないといえる（分からないならば、上の３元連立方程式を解いてみるとよい，解くことができないはずである）。

今日の要点『ベクトルの扱い方』

１．基本的なベクトル公式（下の図に限った話ではない）



①$\overrightarrow{O\underline{B}}+\overrightarrow{\underline{B}C}=\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O\underline{B}}+\overrightarrow{\underline{B}C}$

（ベクトルは間にポイントを入れて分解できる）

②$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ （ベクトルは位置ベクトルの差に分解できる）

③$OB=AC \bigcap OB // AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$

（平行で長さが同じであれば、ベクトル量は等しい）

④$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BO}$ （互いに逆ベクトル）

⑤$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BO}\right|=OB$ （ベクトルの絶対値は線分の長さ）

⑥$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle BOA \quad (\angle BOA=\theta)$

⑦$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ （零ベクトル）

２．ベクトルの演算公式

（以下、$u,v\in R$ （スカラー）であり、$\mathbf{a},\mathbf{b}$ をベクトルとする）

①$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

②$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

③$\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

④$u(v\mathbf{a})=(uv)\mathbf{a}$

⑤$(u+v)\mathbf{a}=u\mathbf{a}+v\mathbf{a}$

⑥$u(\mathbf{a}+\mathbf{b})=u\mathbf{a}+u\mathbf{b}$

⑦$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

⑧$0\mathbf{a}=0$

３．ベクトルが平行・同一直線上・同一平面上

① 平行：$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in R)$

② $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ が同一直線上のとき、

（１）$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \quad (k \in R)$　（A, B, C を入れ替えても成立する）

（２）$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s + t = 1 \mid s, t \in R)$（$a, b, c$ を入れ替えても成立する）

（３）$\vec{c} = s\vec{a} + (1 - s)\vec{b} \quad (s \in R)$（$a, b, c$ を入れ替えても成立する）

③ $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ が同一平面上のとき、

（１）$\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \in R)$（$A, B, C, D$ を入れ替えても成立する）

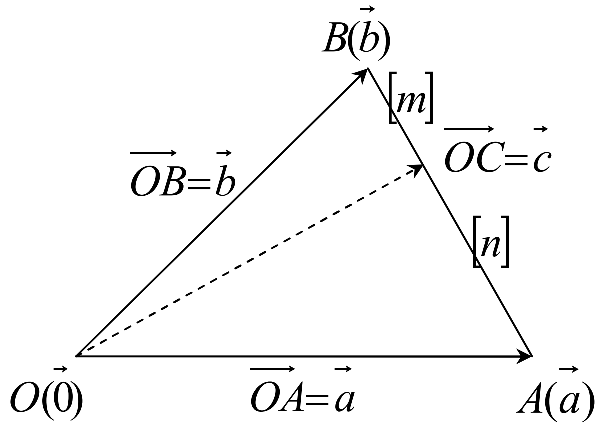
（２）$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad (x + y + z = 1 \mid a, b, c \in R)$

（a, b, c, d を入れ替えても成立する）

４．　位置ベクトル

（例）定点O（原点）から点Pに向かうベクトル$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$を点$P$の位置ベクトルという。このとき、点$P$やこの位置ベクトル自体を$P(\vec{p})$などと表す。

５．　内分・外分点のベクトル



$BC : AC = m : n$

$$\Rightarrow \vec{c} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n} \quad (m, n \in R)$$

６．　重心

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ から成る三角形の

重心 $G(\vec{g})$ に対して、$\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

７．　（平面）ベクトルの１次独立（２次元、$\vec{a}, \vec{b} \in R^2$）

（本来の意味とは違うので注意，文系は知らなくてもよい）

（定義） $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq k\vec{b}\ (\forall k \in R)$ のとき、$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるという。

（つまり、$\vec{a}, \vec{b}$ が同一直線状に有り得ないとき）

（性質）

① $\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ の解が、$(x\ y) = (0\ 0)$ しかない。

（例） $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}, \vec{b} \in R^2)$ とすれば、

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1x+a_2y \\ b_1x+b_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+a_2y=0 \\ b_1x+b_2y=0 \end{cases}$$

この解が、$(x\ y)=(0\ 0)$のみであれば、$\vec{a},\vec{b}$は一次独立

②$\vec{a},\vec{b}$と同じ次元（①の例では２次元）のベクトル$\vec{c}$が、

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad(s,t\in R)$と表すことができる。

８．　<u>（空間）ベクトルの１次独立</u>（３次元、$\vec{a},\vec{b}\in R^3$）

（本来の意味とは違うので注意，文系は知らなくてもよい）

（定義）$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\neq\vec{0}$かつ$A(\vec{a}),B(\vec{b}),C(\vec{c})$が同一平面上にないとき、

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$は一次独立であるという。

（性質）以下、７の平面の場合と同様。４次元以降の場合も同様。以降、省略。

９．　<u>一次従属</u>

…７や８のような定義や性質を満たさない場合、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$は一次従属であるという。

１０．<u>基本ベクトル</u>

（定義）ベクトルの成分のうち、一つの成分が１で他の全ての成分が０であるようなベクトルを基本ベクトルという。

＜例＞

・R^2（２次元平面）において、$\overrightarrow{e_1}=(1,0)$と$\overrightarrow{e_2}=(0,1)$

・R^3（３次元空間）において、$\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$と$\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$と$\overrightarrow{e_2}=(0,0,1)$

（性質）全てのベクトルは、同じ次元空間の属する単位ベクトルを使って、ただ１通りに表せる（同値なものは同じ場合とカウント）。

＜例＞（全ページの例に従う）

・R^2（２次元平面）において、$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} \quad (\vec{a}, \vec{e_1}, \vec{e_2} \in R^2 \ and \ a_1, a_2 \in R)$

・R^3（３次元空間）において、

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \quad (\vec{a}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in R^3 \ and \ a_1, a_2, a_3 \in R)$$

・R^n（ｎ次元平面）において、（文系は分からなくてもよい）

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e_i} \quad (\vec{a}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n} \in R^n \ and \ a_1, a_2, a_n \in R \mid \forall n \in R)$$

１１．成分による演算

・R^2（２次元平面）において、$\vec{a} = (a_1, a_2)$ ならば、$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$

・R^3（３次元空間）において、$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ならば、$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

（内積の話）

・R^2（２次元平面）において、$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ ならば、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

・R^3（３次元空間）において、$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ならば、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

１２．　内積に関して

・R^2（２次元平面）において、$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$と成す角度$\theta$

①　$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

②　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$

③　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$

④　$O(\vec{0}),A(\vec{a}),B(\vec{b})$から成る三角形

・$\Delta OAB=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

・$\Delta OAB=\dfrac{1}{2}\left|a_1b_2-b_1a_2\right|$

・R^3（３次元空間）においても、同様に考えよう。

１３．方向ベクトルとベクトル方程式

・$A(\vec{a})$を通り、$\vec{v}$に平行な直線上を動く任意の$P(\vec{p})$

$\Leftrightarrow\vec{p}=\vec{a}+t\vec{v}\quad(\vec{p},\vec{a},\vec{v}\in R^n\mid\forall t,n\in R)$

※この$\vec{v}$を方向を決めるベクトルなので、方向ベクトルと呼ぶ。

・$A(\vec{a})$を通り、$\vec{v}$に垂直な直線上を動く任意の$P(\vec{p})$

$\Leftrightarrow(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0\quad(\vec{p},\vec{a},\vec{v}\in R^n\mid\forall n\in R)$

・$C(\vec{c})$を中心とする半径のr円（球）上にある点$P(\vec{p})$において、

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \quad (\vec{p},\vec{c}\in R^n \mid \forall n, r\in R)$$

・$A(\vec{a}), B(\vec{b})$を両端とする円（球）上にある点$P(\vec{p})$において、

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad (\vec{p},\vec{a},\vec{b}\in R^n \mid \forall n\in R)$$

（直径の両端から伸ばした直線は円・球上で垂直に交わる）

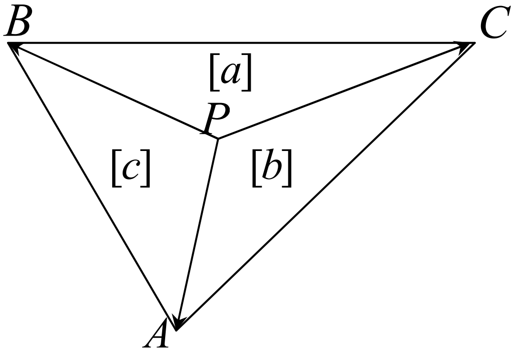
今日の要点『ベクトルの応用』

☆図形の内部の点によって分割される図形の面積比・体積比

※ この定理は、記述式の問題では使用できない。
　穴埋めやマーク問題や時間がないときに使用すること！

以下、$a,b,c,d \geq 0 \mid a,b,c,d \in R$ とする。

・$\triangle ABC$ の内部に存在する点 P



$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$（$a\overrightarrow{AP}+b\overrightarrow{BP}+c\overrightarrow{CP}=\vec{0}$）

$\Rightarrow \underline{\triangle BCP : \triangle ACP : \triangle ABP = a:b:c}$

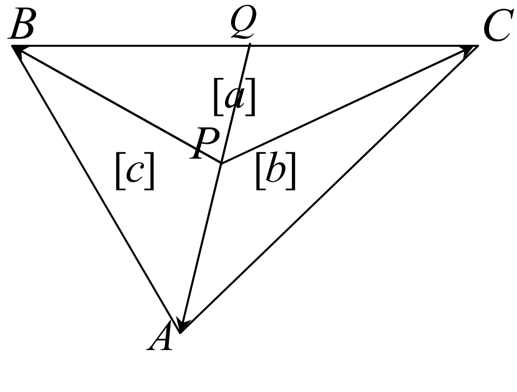
・四面体 $ABCD$ の内部に存在する点 P

$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}=\vec{0}$　（$a\overrightarrow{AP}+b\overrightarrow{BP}+c\overrightarrow{CP}+d\overrightarrow{DP}=\vec{0}$）

$\Rightarrow \underline{BCDP : ACDP : ABDP : ABCP = a:b:c:d}$

【証明】（三角形の場合のみ）

$$a\overrightarrow{AP}+b\overrightarrow{BP}+c\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=b(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$$
$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}-(b+c)\overrightarrow{AP}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$



そこで、AP と BC の交点を Q とすれば、

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}\ \ (k\in R)$ とおける。よって、

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{kb}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{kc}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\quad \cdots①$$

①より、Q は BC 上だから、$\dfrac{kb}{a+b+c}+\dfrac{kc}{a+b+c}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{k(b+c)}{a+b+c}=1$

$\Leftrightarrow k(b+c)=a+b+c$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{a+b+c}{b+c}$

よって、$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{a+b+c}{b+c}\overrightarrow{AP}$

$\Rightarrow \underline{AP:AQ=b+c:a+b+c}$ から $\underline{AP:PQ=b+c:a}$

ゆえに、$\triangle BCP:BACP=a:b+c\quad \cdots②$

さらに、①より、Q は BC 上だから、$\underline{BQ:QC=c:b}$

$BACP=\triangle ABP+\triangle ACP$ から、$\triangle ABP:\triangle ACP=c:b\cdots③$

②および③より、$\underline{\triangle BCP:\triangle ACP:\triangle ABP=a:b:c}$