# 今日の要点　Ｎｏ．９「指数・対数」

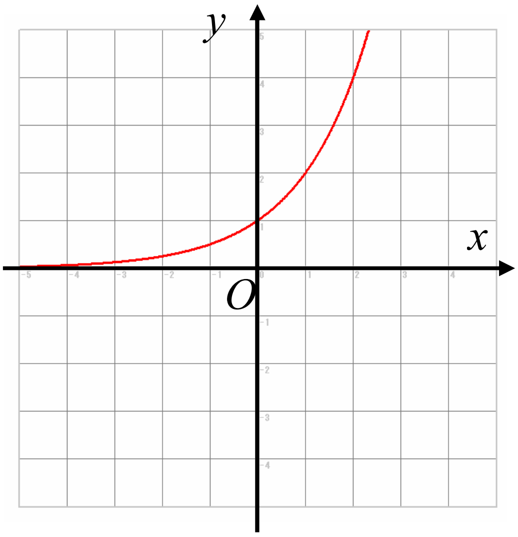
＜指数・対数の基本的な性質＞

## １．指数

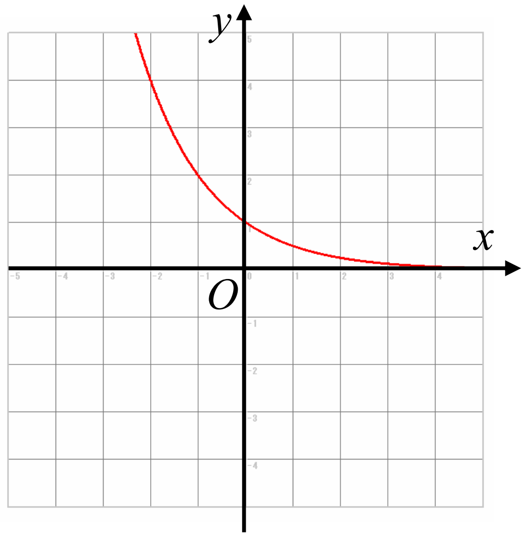
$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

＜指数関数のグラフ＞

（ア）$y = a^n$ $(a > 1)$



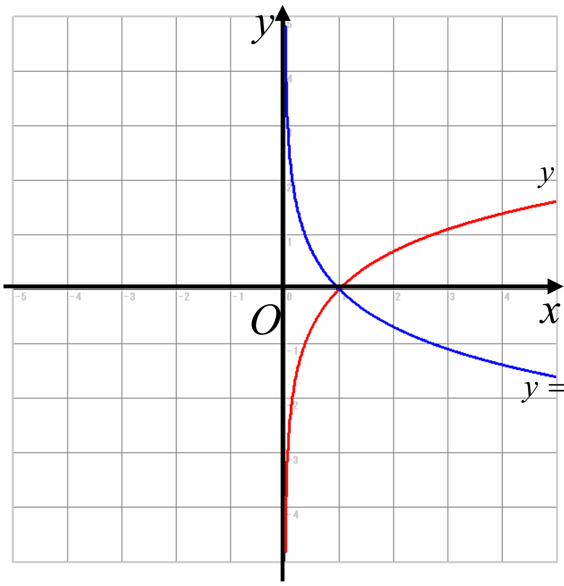

（イ）$y = a^n$ $(0 < a < 1)$




## ２．対数

$$a^m = X \quad \Leftrightarrow \quad \log_a X = m \ (a > 0, a \neq 1, M > 0)$$
$$a^{\log_a X} = X \qquad \log_a a = 1$$
$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y \qquad \log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$$
$$\log_a X^N = N \log_a X \qquad \log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$$

＜対数関数のグラフ＞

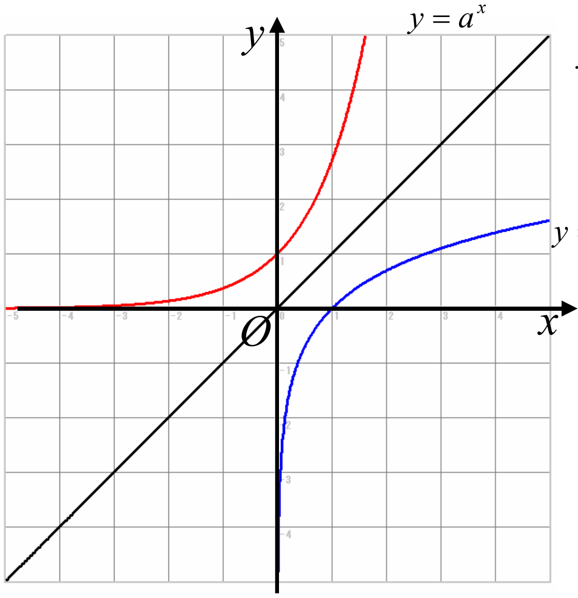



ｃｆ：　$a^x = y \iff \log_a y = x$

よって、$y=a^x$ と $y=\log_a x$ は、$x$ と $y$ に関して対称的

∴　$xy$ 平面では、$y=a^x$ と $y=\log_a x$ は、$y=x$ に関して線対称となる。

以上をグラフで示したものが以下である。$(a>1)$



４９　（よく出る）桁数・最高位の数字

（例）$A = 18^{50}$ について以下の問いに答えよ。（群馬大学・教育）

１．　**Ａは何桁の数か？**

$10^n \le A < 10^{n+1}$ $(n \in N)$ が成立するとき、Ａはｎ＋１桁である。

$10^n \le 18^{50} < 10^{n+1}$ を満たすｎを求めれば良い。

両辺に常用対数（底を 10 とする対数：$\log_{10}$）をとって、

$\log_{10} 10^n \le \log_{10} 18^{50} < \log_{10} 10^{n+1}$

$n \log_{10} 10 \le 50 \log_{10} 18 < (n+1) \log_{10} 10$

$n \le 50 \log_{10} 2^3 \cdot 3 < n+1$

$n \le 50(\log_{10} 2^3 + \log_{10} 3) < n+1$

$n \le 50(3\log_{10} 2 + \log_{10} 3) < n+1$　　$\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771$ より、

代入すると、$n \le 62.76 < n+1$　∴　$n = 62$ から　**Ａは 63 桁**

２．　**Ａの最高次の数字を求めよ。**

Ａの最高次の数を $a$ とすれば、$a \cdot 10^n \le A < (a+1) \cdot 10^n$ が成立

$a \cdot 10^{62} \le 18^{50} < (a+1) \cdot 10^{62}$　　これをみたすａを求めれば良い。

両辺に常用対数（底を 10 とする対数：$\log_{10}$）をとって、

$\log_{10} a \cdot 10^{62} \le \log_{10} 18^{50} < \log_{10}(a+1)10^{62}$

$\log_{10} a + \log_{10} 10^{62} \le \log_{10} 18^{50} < \log_{10}(a+1) + \log_{10} 10^{62}$

$\log_{10} a + 62 \le 62.76 < \log_{10}(a+1) + 62$

$\log_{10} a \le 0.76 < \log_{10}(a+1)$

そこで、$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \approx 1 - 0.3010 \approx 0.6990$ かつ

$\log_{10} 6 = \log_{10} 3 \cdot 2 = \log_{10} 3 + \log_{10} 2 \approx 0.4771 + 0.3010 \approx 0.7781$ より、

$\log_{10} 5 \le 0.76 < \log_{10} 6$　**∴　最高次の数は 5**

## ５０　対数の大小比較

※ 対数の大小比較は、対数のあらゆる公式をフルに使わなくてはならない。

（イ）

・$\log_{10}2$ と $\dfrac{3}{10}$ をともに、10 倍する。

そして、$10\log_{10}2$ が 3 よりも大なことを示す。

・$80<81$ に常用対数を適用し、$\log_{10}3>\dfrac{3}{4}\log_{10}2+\dfrac{1}{4}$ を示す。

これに上の問題の結果を利用する。

（ロ）３つ以上の対数の大小

まず５つを、「0 以下」「0 以上 1 以下」「１以上」分類する。

| $\log_a X\ (a>1)$ において、 | |
|---|---|
| 「0 以下」 | → $0<X<1$ |
| 「0 以上 1 以下」 | → $1<X<a$ |
| 「1 以上」 | → $X>a$ |

| $\log_a X\ (0<a<1)$ において、 | |
|---|---|
| 「0 以下」 | → $X>1$ |
| 「0 以上 1 以下」 | → $a<X<1$ |
| 「1 以上」 | → $0<X<a$ |

そうすると、$\log_2\sqrt{3}, \log_3\sqrt{2}, \dfrac{2}{3}$ の大小で迷う。

$\log_2\sqrt{3}, \dfrac{2}{3}$ と、$\log_3\sqrt{2}, \dfrac{2}{3}$ を比較する。その際、（イ）の最初でやったことと全く同じことをする。

$\boxed{5\ 1}$ 指数方程式

（ロ）の解答を示すので、それを利用して、（イ）を解くこと。

（例）$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 9\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + 32 \leq 0$ を解け　（関西大学・経済）

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2、\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = a\ (a > 0)$ とおくと、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 32 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 9\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 32 = a^2 - 18a + 32 \leq 0$$

因数分解して、$(a-16)(a-2) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq a \leq 16$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = a\ (a > 0)$ より、$2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leq 16 \quad 2^1 \leq 2^{-x} \leq 2^4$

よって、$1 \leq -x \leq 4 \quad \therefore -1 \leq x \leq -4$

５２　対数方程式・不等式

（イ）$\log_4(4x-7)+\log_2 x = 1+3\log_4(x-1)$

まず底を合わせる。

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = \frac{\log_4 x}{\frac{1}{2}} = 2\log_4 x = \log_4 x^2,\quad 1=\log_4 4$$

$$\therefore\quad \log_4(4x-7)+\log_4 x^2 = \log_4 4+\log_4(x-1)^3$$

$$\log_4(4x-7)x^2 = \log_4 4(x-1)^3$$

$(4x-7)x^2 = 4(x-1)^3$　これを解けばよい。

しかし、そもそも対数では真数が正でないといけないので、
条件として、$4x-7>0,\ x>0,\ x-1>0$

（ロ）

同じく底を合わせて解く

$$\log_x y-\log_y x^3-2<0$$

$$\log_x y-3\frac{\log_x x}{\log_x y}-2<0$$

$$\log_x y-3\frac{1}{\log_x y}-2<0$$

ここで、$\log_x y$ 倍すればいいと思うが、$\log_x y$ が正か負か分からないので、
不等号の向きを変えるかどうかで困る。

そこで、工夫が必要で、$(\log_x y)^2$ 倍すれば、これは明らかに正なので、不等号の処理には困らない。

$\boxed{5\ 3}$　指数・対数関数

（イ） $f(x)=4^x-2(2^x+2^{-x})+4^{-x}$ の最小値　（大阪市立大）

$2^x=a>0$ とおく。すると、 $f(x)=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$

そこで、 $a+\dfrac{1}{a}=t$ （相加相乗平均より $t\geq 2$ ）として、 $f(x)$ を $t$ で表す。

（ロ）

対数の底を $2$ で統一。

さらに、 $\log_a\dfrac{X}{Y}=\log_a X-\log_a Y$ を用いて、対数を分解する。

そして、 $\log_2 x=a$ とおいて問題を解く。

$\boxed{5\ 4}$　指数・対数関数

（イ） $2^x=3^y=4^z=6^w$ のとき、 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ を示す。（関西大）

$\log 2^x=\log 3^y=\log 4^z=\log 6^w=t$ （底は何でも良い）とおけば、 $x,y,z,w$ を対数で表せる。これを証明したい左辺と右辺にそれぞれ代入すればよい。

（ロ）【高知大】

（１）底を $a$ に固定すれば証明できる。

（２） $\log_a b=x,\log_b c=y,\log_c a=z$ とおけば、

たとえば、 $\log_b a=\dfrac{\log_a a}{\log_a b}=\dfrac{1}{x}$ と表せる。

以上と（１）より、 $x,y,z$ に関する条件式が３つできる。

最後に、 $\boxed{x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz}$ に当てはめる。