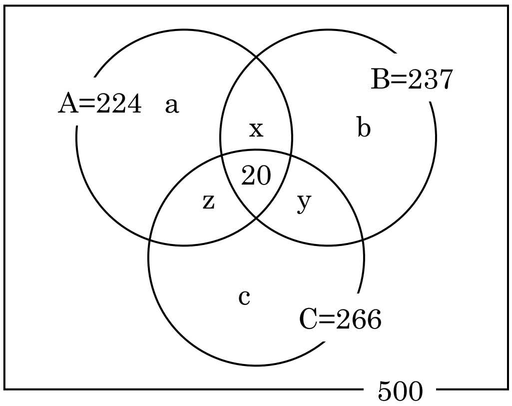
今日の要点　Ｎｏ．６「論証」

$\boxed{３１}$　（慶応・商）ベン図の問題

※まず、ベン図を書く。そして、問題の情報を全て、図に書き込む！



＜上の図を利用して、集合の記号を復習しよう＞

$A\cap B = x+20 \quad A\cup B = a+b+x+y+z+20$

$B\cap C = y+20 \quad B\cup C = b+c+x+y+z+20$

$C\cap A = z+20 \quad C\cup A = c+a+x+y+z+20$

$A\cap B\cap C = 20$

$A\cup B\cup C = a+b+c+x+y+z+20$

＜集合についての公式（ド・モルガンの法則）＞

$\overline{A\cap B} = \overline{A}\overline{\cap}\overline{B} = \overline{A}\cup\overline{B} \quad (\overline{\cap} = \cup)$

$\overline{A\cup B} = \overline{A}\overline{\cup}\overline{B} = \overline{A}\cap\overline{B} \quad (\overline{\cup} = \cap)$

$A\cup B\cup C = A+B+C-(A\cap B + B\cap C + C\cap A) + A\cap B\cap C$

＜確実に解く方法：連立方程式＞

$$\begin{cases} a+b+c+x+y+z+20+9=500 \\ a+x+z+20=224 \\ b+x+y+20=237 \\ c+y+z+20=266 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+x+y+z=471 & \cdots \quad (1) \\ a+x+z=204 & \cdots \quad (2) \\ b+x+y=217 & \cdots \quad (3) \\ c+y+z=246 & \cdots \quad (4) \end{cases}$$

①　ｘ＋ｙ＋ｚ＋20 を求めればよい。
・・・（２）＋（３）＋（４）：$a+b+c+2(x+y+z)=667$
これから（１）を除けばｘ＋ｙ＋ｚが求まる。

②　ｘ＋ｙ＋ｚを求めればよい。

③　ａ＋ｂ＋ｃを求めればよい。

（１）からｘ＋ｙ＋ｚを除けばよい。

＜早く解く方法：ド・モルガンの法則＞

（１）$(A \cap B + B \cap C + C \cap A) - 2(A \cap B \cap C)$ を求めればよい

$$A \cup B \cup C = A+B+C-(A \cap B + B \cap C + C \cap A) + A \cap B \cap C$$
$$\therefore (A \cap B + B \cap C + C \cap A) - A \cap B \cap C = A+B+C-A \cup B \cup C$$
$$\therefore (A \cap B + B \cap C + C \cap A) - 2(A \cap B \cap C) = A+B+C-A \cup B \cup C - A \cap B \cap C$$

$$=224+237+266-(500-9)-20=216$$

（２）（１）から２０減らす

（３）$A+B+C-\{(A \cap B + B \cap C + C \cap A) - 2(A \cap B \cap C)\}$
　　つまり、Ａ＋Ｂ＋Ｃから（１）の答えを除く。

$\boxed{３２}$　必要条件・十分条件

※　$\boxed{\quad A \quad}$は、$\boxed{\quad B \quad}$であるための$\boxed{（\qquad）条件}$

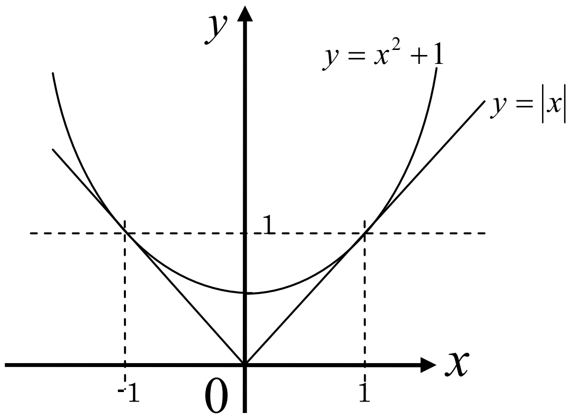
①$A \Rightarrow B$のとき、十分条件
②$A \Leftarrow B$のとき、必要条件
③　①かつ②なら、必要十分条件

<u>ｃｆ；図を書いて解く方法</u>

（例）$\boxed{\quad A \quad}$は、$\boxed{\quad B \quad}$であるための$\boxed{（\qquad）条件}$

$$A = \{(x, y) | y \geq x^2 + 1\} \quad B = \{(x, y) | y \geq |x|\}$$

⇒頭ですぐ考えられそうなら、図を書くとやりやすい。



ＡはＢに含まれる（$A \subset B$）

∴　Ａのときには常にＢが成立

∴　$A \Rightarrow B$より、十分条件

$$\boxed{A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \Rightarrow B}$$

（４）（５）ヒント

- $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (0, 0, 0)$

- $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0$
  $\Leftrightarrow \quad 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) = 0$
  $\Leftrightarrow \quad (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2yz + z^2) + (z^2 + 2zx + x^2) = 0$
  $\Leftrightarrow \quad (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 0$

- $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$も上と同様に

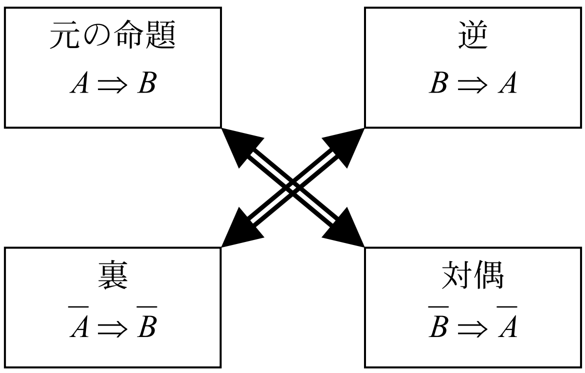
$\boxed{３３}$（宿題）必要条件・十分条件

→$\boxed{３２}$の「**<u>ｃｆ；図を書いて解く方法</u>**」を実践すべし

$\boxed{３４}$　（宮崎・前期）逆・裏・対偶

命題：「xyが無理数ならば、x, yの少なくとも一方は無理数である。」（$x, y \in \Re$）

＜復習＞



命題とその対偶の真偽は一致

① 逆の対偶は裏
　よって、逆と裏の真偽は一致

② 命題で証明しにくいときは、対偶（その否定）を証明すればよい。
とくに、「少なくとも…である」の対偶は「１つも…ない」

逆：「x, yの少なくとも一方は無理数ならば、xyが無理数である。」
裏：「xyが有理数ならば、x, yはどちらも有理数である。」

<u>注：「無理数」の否定は「有理数」、「少なくとも一方は」の否定は「どちらも」</u>

対偶：「x, yはどちらも有理数ならば、xyが有理数である。」

（証明）

x, yはどちらも有理数ならば、

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} \qquad (a, b, c, d \text{ はいずれも整数})$$

このとき、$xy = \dfrac{ac}{bd}$　a, b, c, d はいずれも整数より、これも有理数

（証明終）

$\boxed{３５}$（宿題）対偶を使用した証明

→$\boxed{３４}$の「**対偶の証明**」を実践すべし

$\boxed{３６}$　有理数・無理数と背理法

（１）【有名問題】$\sqrt{2}$が無理数であることを示せ。

・$\sqrt{2}$を有理数だと仮定して、矛盾を導く（背理法）

（解答）

$\sqrt{2}$を有理数であり、$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$（m,nは互いに素な整数）とおける仮定する。

→$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$を２乗すると・・・あれ？

（２）「$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a=c, b=d$」を証明する。

（a,b,c,dはいずれも有理数）

$a-c=(d-b)\sqrt{2}$

・$b \neq d$だとすると、$\dfrac{a-c}{d-b}=\sqrt{2}$　これは・・・・・・矛盾。

・　$\therefore$　$b=d$であり、$a-c=(d-b)\sqrt{2}=0\cdot\sqrt{2}=0$より、$a=c$といえる。

（３）（宿題）

例題　$a+b\sqrt{l}=c+d\sqrt{l}$（$\sqrt{l}$を無理数、a, b, c, dを有理数とする）が成立するとき、どんなことが言えるか、述べなさい。

＜論証の基本の確認＞

1. $A \subset B$ とは何を意味するか、論じなさい。
2. $x \in B$ とは何を意味するか、論じなさい。（Ｂには特に意味はない。）
3. $A \cap B$ とは何を意味するか、論じなさい。
4. $A \cup B$ とは何を意味するか、論じなさい。
5. $\overline{A}$ とは何を意味するか、論じなさい。