今日の要点　Ｎｏ．１３「整数」

$\boxed{７３}$

全ての整数は、$n=5k,5k-1,5k-2,5k-3,5k-4$（kは整数）と表せる。

面倒だが、これらひとつずつをn^2+n+1に代入すれば、これが全ての整数ｎに対して、５で割り切れない（＝５の倍数でない）ことが証明できる。

$\boxed{７４}$　合同式（早稲田大・教育）

「余り」に関して、以下の性質が存在する。

Ｘを Ｙで割るときに余りＭが発生した。このとき、X^nの余りは、このＭをｎ乗して、Ｍで割ったときの余りと同じである。

このとき、この様子を次のような式で表す。

$$X \equiv M \ (\mathrm{mod}\, Y)$$

$$\Rightarrow X^n \equiv M^n \equiv \cdots \quad (\mathrm{mod}\, Y)$$

このような式を合同式という。

合同式においては、以下のような性質も成立する。

$$A \equiv a \,, B \equiv b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B \equiv a+b \\ A-B \equiv a-b \\ AB \equiv ab \end{cases}$$

この性質を利用すれば、余りの問題は簡単に解ける。

（例） n を正の整数とすれば、2^n+1 は 15 で割り切れないことを示せ。

（お茶の水女子大・理・数）

以下の合同式をすべて(mod 15)とすれば、

$2^1+1\equiv 3$

$2^2+1\equiv 5$

$2^3+1\equiv 9$

$2^4+1\equiv 16+1\equiv 1+1\equiv 2$

$2^5+1\equiv 2^4\cdot 2+1\equiv 1\cdot 2+1\equiv 3$

$2^6+1\equiv 2^4\cdot 2^2+1\equiv 1\cdot 2^2+1\equiv 5$

$2^7+1\equiv 2^4\cdot 2^3+1\equiv 1\cdot 2^3+1\equiv 9$

$2^8+1\equiv 2^4\cdot 2^4+1\equiv 1\cdot 1+1\equiv 2$

というふうに $\{3,5,9,2\}$ という数列が繰り返されることが分かる。

k を正の整数とすれば、 5 以降の n において、 $n=4k,4k+1,4k+2,4k+3$

$2^{4k}+1\equiv \left(2^4\right)^k+1\equiv (1)^k+1\equiv 2$

$2^{4k+1}+1\equiv \left(2^4\right)^k 2+1\equiv 1\cdot 2+1\equiv 3$

$2^{4k+2}+1\equiv \left(2^4\right)^k 2^2+1\equiv 1\cdot 4+1\equiv 5$

$2^{4k+3}+1\equiv \left(2^4\right)^k 2^3+1\equiv 1\cdot 8+1\equiv 9$

となるので、最初の試行と合わせ、正の整数である全ての n において、2^n+1 は 15 で割るとき、余りが $\{3,5,9,2\}$ のいずれかなので、割り切れないことが証明された。

$\boxed{7\ 7}$

（イ）

$x^2 - y^2 = 24 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 24$

これより、$((x+y),(x-y))$ の組み合わせを全て求める。その組み合わせごとに連立方程式を解けば、答えが求まる。但し、x, y が自然数であることに注意せよ。

（ロ）

$xy - 4x - 2y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (xy - 4x - 2y + 8) - 8 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(y-4) - 7 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(y-4) = 7$

より、（イ）と同様に解ける。但し、$x > y > 0$ であることに注意せよ。

$\boxed{7\ 8}$

$a > b > c$ より、$3a > a + b + c$

よって、$3a > \dfrac{3}{4}abc \quad \Rightarrow \quad 4 > bc \quad \Rightarrow \quad 3 \geq bc$

$b > c$ より、これを満たすのは $bc = 3,2$

この先は場場合分けを行う。