今日の要点　Ｎｏ．１２「軌跡」

＜基本的な解き方＞

（例題）$y = ax$ が $y = x^2 - 2x + 2$ に異なる２点Ｐ，Ｑで交わるとき、Ｐ、Ｑと点Ｒ（１，０）で作る三角形の重心をＧとする。a を動かしたときのＧの軌跡を求めよ。（日本女子大・理）

（解答）

①　設問条件の整理

まず「異なる２点で交わる」を条件式で表す。$y = ax$ が $y = x^2 - 2x + 2$ が異なる２点で交わるということは、$x^2 - 2x + 2 = ax$ の判別式が正になる。

$x^2 - (a+2)x + 2 = 0$ の判別式：$D = (a+2)^2 - 8 > 0$ になればよい。

これを解いて、$a < -2 - 2\sqrt{2}$ または $a > -2 + 2\sqrt{2}$

②　座標を文字でおく

Ｐ、Ｑの座標を文字でおく。これらは $y = ax$ 上にあるので、

$P(p, ap), Q(q, aq)\quad (p, q \in \Re)$　とおくことができる。

③　軌跡を求めたい点の座標を (X, Y) とおく

軌跡を求めたい点は、Ｇでこれを $(X, Y)\quad (X, Y \in \Re)$ とおけば、

Ｇはき、Ｑと点Ｒ（１，０）の重心なので、$(X, Y) = \left(\dfrac{p+q+1}{3}, \dfrac{ap+aq}{3} \right)$ とあらわせる。

④　軌跡を求めたい点の座標を、１つの変数のみで表す

$x^2-(a+2)x+2=0$ の解が $x=p,q$ であることから、解と係数の関係により、

$p+q=a+2$ これをG $(X,Y)=\left(\dfrac{p+q+1}{3},\dfrac{ap+aq}{3}\right)$ に代入すれば、

$$(X,Y)=\left(\frac{a+3}{3},\frac{a(a+2)}{3}\right)$$

⑤　軌跡の座標の変数を消去する

ゆえに $X=\dfrac{a+3}{3}$ から、$a=3X-3$ で、これを $Y=\dfrac{a(a+2)}{3}$ に代入して、

$$Y=\frac{(3X-3)(3X-1)}{3}$$

これを整理して、$Y=(X-1)(3X-1)$

⑥　条件の整理

①の $a<-2-2\sqrt{2}$ または $a>-2+2\sqrt{2}$ から $a=3X-3$ より、

$3X-3<-2-2\sqrt{2}$ または $3X-3>-2+2\sqrt{2}$

これを整理して、$X<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}$ または $X>\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$

以上より、G (X,Y) の軌跡は、

$y=(x-1)(3x-1)$ の $x<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3}$ または $x>\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ の部分　（完）

６８　$mx-y+4m+21=0, x+my+3m-14=0$

（例題）で練習した順序に従って解いてみよう。

軌跡を求めたい点の座標を(X,Y)

この(X,Y)は最初の２式を満たすので、

$mX-Y+4m+21=0, X+mY+3m-14=0$が成立する。

そこで、**軌跡を求めたい点の座標を、１つの変数のみで表す**をやってみると、

(X,Y)がmの２次式で表され、これを解くのは困難。ステップを飛ばし、

軌跡の座標の変数を消去する

上の２式からmを消去すればよい。例えば、$mX-Y+4m+21=0$から、

$(X+4)m-Y+21=0$　ゆえに、$m=\dfrac{Y-21}{X+4}$　これを、$X+mY+3m-14=0$

に代入すれば、X,Yだけの式なる。これを整理すればいいのだが、その他に一点だけ注意が必要。

６９

（１）まず、グラフの図を描く。その際、$OP=p, OQ=q$とおく。

すると、$x:X=y:Y=p:q$から$x=\dfrac{p}{q}X, y=\dfrac{p}{q}Y$

$OP\cdot OQ=2$から、$pq=2$よって、$p=\dfrac{2}{q}$　ゆえに$\dfrac{p}{q}=\dfrac{2}{q^2}$

よって、$x=\dfrac{2}{q^2}X, y=\dfrac{2}{q^2}Y$

さらに書いたグラフからも分かるように、三平方の定理から、

$q^2 = X^2 + Y^2$ となる。よって、・・・・

（２）　（１）の結果を単に、$2x + y = 1$ に代入すればよい。

$\boxed{７０}$

（イ）$(x-2m)^2 + (y+m)^2 = m^2 \quad (\forall m \in \Re)$

m が実数全体を動くということは、上を m の方程式としたときに、実数解を持つ。よって、上の方程式を m についてまとめ直し、判別式が０以上になればよい。

（ロ）【たぶん宿題】これは上の（イ）と同様な趣旨の問題である。

（１）以下を使って、ＡＰ^2＝ＢＰ^{2}から方程式を作ればよい。

ｃｆ：$(a,b),(c,d)$ の距離と $(e,f),(g,h)$ の距離が等しいとき、

$$(c-a)^2 + (d-b)^2 = (g-e)^2 + (h-f)^2$$ が成立する。

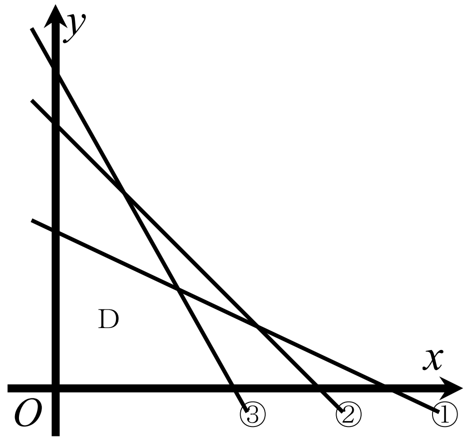
（２）（イ）と同様に、t に関する方程式が０以上において、解を持てばよい。
その条件を考える際に図を描くこと。

$\boxed{7\ 1}$ 線形計画法（※以下を参考に演習題７１を解くこと。）

（例題） $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 15, x + y \leq 8, 2x + y \leq 10$ のとき（京都教育大）

（１） $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 15, x + y \leq 8, 2x + y \leq 10$ を図示

$$\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\dfrac{1}{3}x + 5 & \ldots ① \\ y \leq -x + 8 & \ldots ② \\ y \leq -2x + 10 & \ldots ③ \end{cases}$$

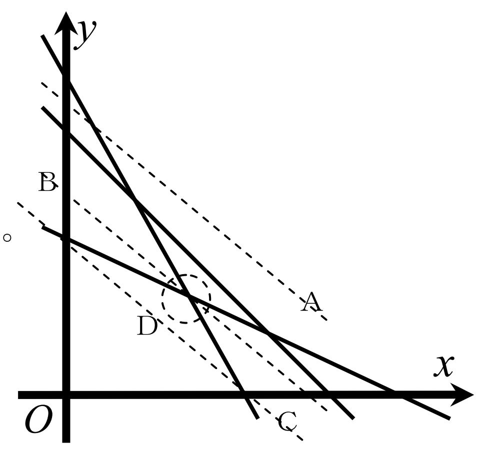


$x \geq 0, y \geq 0$ において、
これらを図示すると、右図になる。
求める範囲は、左図のＤの部分。
（境界も含む）

（２） $3x + 2y$ の最大値

図で分析するために $3x + 2y$ を方程式にする。 $3x + 2y = k \quad (k \in \Re)$
そうすれば、$3x + 2y$ の最大値を求めるということは $3x + 2y$ の最大値を求めるということは、k の最大値を求めるということと同じ。

$3x + 2y = k$ を描くと、$y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{k}{2}$ 　これを図に描くと、以下の通り。



$y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{k}{2}$ の候補を破線で３つ描いた。
ｙ切片が $\dfrac{k}{2}$ なので、k を最大にするには、
ｙ切片ができるだけ多くなくては行けない。
しかし、この直線はＤに触れていなくてはいけないので、Ｂが k を最大にする。
つまり、$3x + 2y = k$ が○を通ればいい。
$x + 3y = 15,\ 2x + y = 10$ の交点は、
これを解くと $(3,4)$ これを $3x + 2y = k$

$9+8=17=k$ よって、最大値１７.

（３）【これは宿題】

ａによって、〇のときに最大だとは限らない。よって、（２）と同様に考えるが、
ａによって場合分けして、また図を描いて考える。

$\boxed{７２}$

（２）まず、条件不等式３つより、xの範囲を求める。そのあと、$3x+y=5$を
$y=-3x+5$に変形して、x^2+y^2に代入してしまえば、単なる２次方程式の問題となる。