市田ゼミ 2008　第４回数学サブゼミの要旨

第４回テーマ『対数の微分』

作成者：河野　愛一朗

$\boxed{\text{例題１}}$　$\dfrac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$，　$e=\lim_{h\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^h$ を利用して，

$\dfrac{d}{dx}\log_a x=\dfrac{1}{x\log_e a}$ を証明しなさい。

証明

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\dfrac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$ [1]

$$=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\qquad\cdots①$$ [2]

ここで，$\dfrac{h}{x}=t$ となる変数 t を用意すると，$h\to 0$ のとき，$t\to 0$

また，$\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{xt}$ とおける。

①に $\dfrac{h}{x}=t$ および $\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{xt}$ を代入し，さらに $h\to 0$ を $t\to 0$ と変換できるので，

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{xt}}=\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$$ [3]

---

[1] $\log_a X-\log_a Y=\log_a\dfrac{X}{Y}$

[2] $N\log_a X=\log_a X^N$

[3] $N\log_a X=\log_a X^N$

xはtに従属しないので，

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{x}\log_a\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}$$

$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ より，[4]

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e$$

対数の底をeに変換すると，

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\frac{\log_e e}{\log_e a}=\frac{1}{x\log_e a}$$ [5]

$$\therefore\quad \underline{\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}}$$ （証明終）[6]

対数の微分の応用

１．自然対数の微分

$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$ に $x=e$ を代入すると， $\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x}$ [7]

$$\therefore\quad \underline{\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}}\quad\cdots②$$

---

4 $e=\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$

5 $\log_a X=\frac{\log_b X}{\log_b a}$

6 底をeとする対数（例：$\log_e x$）を自然対数（natural log）といい，
$\log_e$の部分を単に $\log$ や $\ln$ と表す。（つまり，$\log_e x=\log x=\ln x$）

7 $\ln e=\log_e e=1$

２．変化率・成長率（percent change）

②より，変形して，　$d\ln x = \dfrac{dx}{x}$　が言える。　…③ [8]

３．弾力性

例えば，需要の価格弾力性をεとすると，

$\varepsilon = \dfrac{dQ/Q}{dP/P}$　（Pは価格で，Qは需要量）

③より，$\dfrac{dQ}{Q} = d\ln Q$，$\dfrac{dP}{P} = d\ln P$から，

$\therefore \quad \varepsilon = \dfrac{d\ln Q}{d\ln P}$　…④

４．需要関数

例えば，需要関数$Q = aP^{-b}$を考える（Pは価格で，Qは需要量，a,bは正の定数）。

これに対して，両辺に自然対数を取ると，

$\ln Q = \ln(aP^{-b}) = \ln a + \ln P^{-b} = \ln a - b\ln P$

$\ln Q = \ln a - b\ln P$　…⑤

よって，需要関数$Q = aP^{-b}$を一次式で表すことができた。

そこで，⑤より，$d\ln Q = d\ln a - b\cdot d\ln P$

aは定数より，$d\ln a = 0$で，$d\ln Q = -b\cdot d\ln P$

$\therefore$　④より，需要の価格弾力性$\varepsilon = \dfrac{d\ln Q}{d\ln P} = -b$　…⑥ [9]

これに対して，通常のやり方で弾力性を求めると，

---

8 これ自体は，限界的な成長率。本来は，例えば，$\dfrac{\Delta x}{x}$。

9 bは定数なので，この需要関数は全てのP，Qに対し，弾力性が一定だといえる。

$$\varepsilon = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} \quad \cdots⑦$$

需要関数$Q = aP^{-b}$に対して，$\dfrac{dQ}{dP}$を求めると，

$\dfrac{dQ}{dP} = \dfrac{d}{dP}aP^{-b} = -abP^{-b-1}$　これを，⑦に代入して，

$\varepsilon = -abP^{-b-1}\dfrac{P}{Q} = \dfrac{-abP^{-b}}{Q}$　これに，需要関数の式$Q = aP^{-b}$を代入すると，

$\underline{\varepsilon = \dfrac{-abP^{-b}}{aP^{-b}} = -b}$　これは確かに,対数を使って求めた弾力性の⑥と一致する。

５．コブ・ダグラス関数

例えば，コブ・ダグラス関数$\underline{Y = AK^{\alpha}L^{\beta}}$に対数を使って，変形してみよう。

両辺に自然対数を取ると，$\ln Y = \ln(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \ln A + \ln K^{\alpha} + \ln L^{\beta}$

$\underline{\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L}$

各項とも変数は１次なので，

$$d\ln Y = d\ln A + \alpha \cdot d\ln K + \beta \cdot d\ln L$$

③より，自然対数の限界変化は限界変化率と同じなので，

$$\therefore \quad \underline{\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \alpha \cdot \frac{dK}{K} + \beta \cdot \frac{dL}{L}}$$

よって，（Yの変化率）＝（Aの変化率）＋α（Kの変化率）＋β（Lの変化率）[10]

[10] YをＧＤＰ，Aを技術水準，Kを資本量，Lを労働量とすれば，これはマクロ経済学の成長会計のモデル。

６．指数対数の微分

$\boxed{\text{例題２}}$ $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ を証明しなさい。

証明

$y = a^x$ とする。 $\dfrac{d}{dx}a^x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$

$y = a^x$ より， $x = \log_a y$

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d}{dy}\log_a y = \dfrac{1}{y\ln a}$ $y = a^x$ より $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y\ln a} = \dfrac{1}{a^x \ln a}$ [11]

よって， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy} = a^x \ln a$ $\therefore$ $\underline{\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a}$ （証明終）

ちなみに， $a = e$ と置き換えると，

$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x$ [12] $\therefore$ $\underline{\dfrac{d}{dx}e^x = e^x}$

[11] 例題１の２ページを参照せよ。

[12] $\ln e = \log_e e = 1$