今日の要点『数列』

数列の基本公式

① Σの意味

０． $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

② 等差数列 a_n について

１． 一般項： $a_n = a_1 + d(n-1)$ （d は公差）

２． $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\} \Leftrightarrow 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

３． $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{a_1 + d(k-1)\} = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$ （a_n は末項）

４． $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{a_1 + d(k-1)\} = \frac{1}{2}n\{2a_1 + d(n-1)\}$

③ 等比数列 a_n について

５． 一般項： $a_n = a_1 r^{n-1}$ （r は公比）

６． $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

７． $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$ $(r \neq 1)$

④ Σ関連の公式

８．$\sum_{k=1}^{n} c = c\sum_{k=1}^{n} = nc$

９．$\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} = n$

１０．$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

１１．$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

１２．$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

１３．$\sum_{k=1}^{n} ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$

１４．$\sum(pa_k + qb_k) = \sum pa_k + \sum qb_k = p\sum a_k + q\sum b_k$

⑤その他

１５．階差数列$b_n = a_{n+1} - a_n$のとき，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (k \geq 2, k \in N)$

１６．$S_1 = a_1, a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$

等差数列の練習

『　$a_n = a_1 + d(n-1)$. $S_n = \dfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$　』

> $\boxed{\text{等差数列}}$・・・隣り合う項の差が一定な数列
>
> 第１項（初項）を a_1 とし，隣り合う項の差（公差）を d とおくと，
>
> 第 n 項目の数（a_n）は，
>
> $a_n = a_1 + d(n-1)$ で表すことができ，第１項から第 n 項までの総和（S_n）は，
>
> $S_n = \dfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$　で表すことができる．（ちなみに $a_1 = S_1$）

例題１　次の数列について以下の各問に答えなさい．

1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15　,　・・・・・・・・・

①この数列の第 n 項　及び　第 20 項　を求めなさい．
②この数列の第１項から第 n 項までの合計　及び　第１項から第 20 項までの合計を求めなさい．

＜解答＞（※　　　　部は記述する必要はない．）

①第 n 項目の数を a_n ，公差を d とおくと，　初項：$a_1 = 1$ ，公差：$d = 2$
よって　$a_n = a_1 + d(n-1)$　より　$a_1 = 1$ ，$d = 2$ をこれに代入すると，
$a_n = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n \quad 2 = 2n - 1$

∴第 n 項：$a_n = 2n - 1$

また，　$a_n = 2n - 1$　に　$n = 20$ を代入すると，　$a_{20} = 2 \cdot 20 \quad 1 = 39$

∴第 20 項：$a_{20} = 39$

②第１項から第 n 項までの合計を S_n とおくと，

$S_n = \dfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$ より　これに　$a_1 = 1$ ，①の $a_n = 2n - 1$　を代入すると，

$S_n = \dfrac{1}{2}n(1 + 2n - 1) = \dfrac{1}{2}n(2n) = n^2$ ∴第１項から第 n 項までの合計：$S_n = n^2$

また，　$S_n = n^2$　に　$n = 20$ を代入すると，　$S_{20} = 20^2 = 400$

∴第１項から第 20 項までの合計：$S_{20} = 400$

練習１　次の数列について以下の各問に答えなさい.

5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , 23 , 26　, ・・・・・・・・・

①この数列の第 n 項　及び　第 15 項　を求めなさい.
②この数列の第 1 項から第 n 項までの合計　及び　第 1 項から第 50 項までの合計を求めなさい.

練習２　次の数列について以下の各問に答えなさい.

11 , 6 , 1 , -4 , -9 , -14 , -19 , -24　, ・・・・・・・・・

①この数列の第 n 項　及び　第 100 項　を求めなさい.
②この数列の第 1 項から第 n 項までの合計　及び　第 1 項から第 100 項までの合計を求めなさい.

数列の練習問題

１．{2,6,18,54,…} この数列の第 1 項から第 n 項までの合計を求めなさい.

２．$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の意味を述べよ.

３．$\sum_{k=1}^{n} k$， $\sum_{k=1}^{n} k^2$， $\sum_{k=1}^{n} k^3$ を Σ を使わずに表せ.

４．$\sum_{k=1}^{5}(3k^2-6k+3)$ の値を求めよ.

５．$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2$ を Σ を使わずに表せ.

６．$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} k$ を Σ を使わずに表せ.

７．$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} n$ を Σ を使わずに表せ.

８．a_n を S_n で表せ.