市田ゼミ 2007　数学サブゼミの練習問題①

作成者：河野　愛一朗

第１回目から第３回目のサブゼミの内容を踏まえて、以下の問題を解いてみて下さい。

注意

１　登場する文字は、特に断りがない限り、全て実数であるとする。
２　特に断りがない限り、x, y を変数、a, b, c, d, p, q を定数として扱う。
３　解く際、途中計算式及び解法の説明も残しておきましょう。

１　対数について

（１）$a>1$ のとき、次のグラフを xy 平面に描き、互いにどのような関係があるか述べよ。

①$y=\log_a x$　②$y=a^x$　③$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

（２）xy 平面における $y=\log_5 x$ のグラフを描き、次を求めよ。

①x 切片　②$y=1$ のときの y の値　③$y=\dfrac{1}{5}$ のときの x の値

（３）コブラグラス型関数 $U=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ に対し、対数をとったときどのような性質があるか述べよ。[1]

[1] $\ln U=\ln x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ を展開すれば良い。$\ln$ とは $\log_e$ のことである。

２　逆関数の性質について

〇以下の方程式のグラフを書け。

・ $x = y^2$

・ $y = \sqrt{x}$

・ $x = y^2 + 1$

・ $y = \sqrt{x-1} + 3$ [2]

・ $f(x) = (x-2)^2 + 3$ のときの $y = f^{-1}(x)$

３　数列について

問　$a_n = a(1+r)^n$ のとき、$\sum_{i=1}^{n} a_n$ と $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

４　微分について

問　$f(x) = \sqrt{x}$ のとき、以下の関数を求め、そのグラフも書け。

（１） $y = f(x)$

（２） $y = \frac{d}{dx} f(x)$

（３） $y = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

[2] xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフを、x 軸方向に p 、y 軸方向に q 移動させると、$y - q = f(x-p)$ となる。

5　その他

問　$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$、$e=\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$ を利用して、以下を証明しなさい。

（１）$\frac{d^n}{dx^n}e^x=e^x$（n は全ての自然数）

（２）$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$

（３）$\frac{d}{dx}\log_a f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ [3]

$\boxed{\text{参考}}$　証明する際、以下の例題を参考にせよ。

例題　$\frac{d}{dx}e^x=e^x$ を証明せよ。

証明

$$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

e^x は h に従属しないので、

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

ここで、$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ を代入すると、

---

[3] 今回、$f'(x)$ は $\frac{d}{dx}f(x)$ を意味している。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h\to 0}\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^h - 1}{h}$$

h は t に従属しないので、

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h\to 0}\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h\to 0}\left[\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^h\right] - 1}{h}$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h,t\to 0}\left(1+t\frac{h}{h}\right)^{\frac{h}{t}} - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h/t\to 1}\left(1+h\frac{t}{h}\right)^{\frac{h}{t}} - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{(1+h\cdot 1)^1 - 1}{h}$$ [4]

$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = e^x \lim_{h\to 0}1 = e^x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$ （証明終）

---

[4] $\lim_{h,t\to 0}\frac{h}{t} = 1$ と考えている。