線形計画法(linear programming)の基本的な解き方

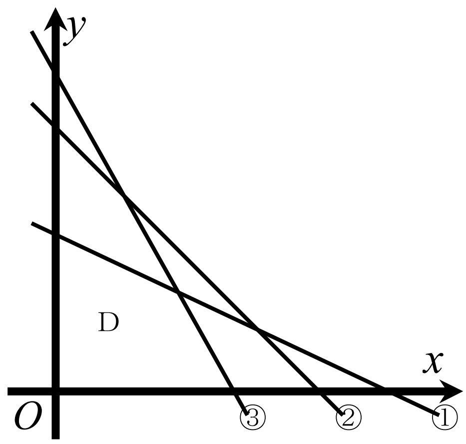
平成 19 年 12 月 14 日
河野　愛一朗

線形計画法は、ミクロ経済学でよく使う method のうちの一つである。具体的には、生産可能領域・境界を図示して、生産・消費の最適問題を考える際に使用する。他には、国際貿易論のリカード・モデルなどでも使用する。そこで、線形計画法の解法を実例を使って紹介する。

（例題） $x \geq 0, y \geq 0, x+3y \leq 15, x+y \leq 8, 2x+y \leq 10$ のとき、
$3x+2y$ の最大値を求めよ。

（１） $x \geq 0, y \geq 0, x+3y \leq 15, x+y \leq 8, 2x+y \leq 10$ を図示

$$\begin{cases} x+3y \leq 15 \\ x+y \leq 8 \\ 2x+y \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\dfrac{1}{3}x+5 & \ldots① \\ y \leq -x+8 & \ldots② \\ y \leq -2x+10 & \ldots③ \end{cases}$$

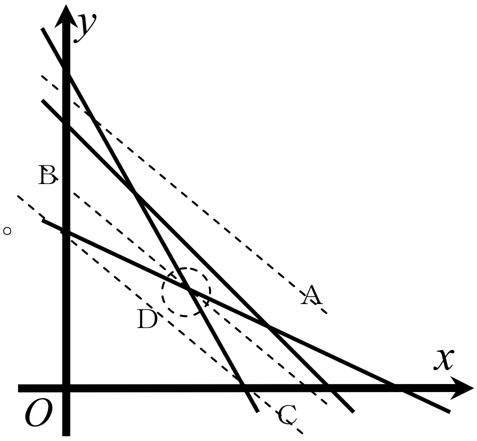


$x \geq 0, y \geq 0$ において、
これらを図示すると、右図になる。
求める範囲は、左図のＤの部分。
（境界も含む）

（２） $3x+2y$ の最大値

図で分析するために $3x+2y$ を方程式にする。$3x+2y=k \quad (k \in \Re)$
そうすれば、$3x+2y$ の最大値を求めるということは $3x+2y$ の最大値を求めるということは、k の最大値を求めるということと同じ。

$3x+2y=k$ を描くと、$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$　これを図に描くと、以下の通り。



$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$ の候補を破線で３つ描いた。

ｙ切片が $\dfrac{k}{2}$ なので、k を最大にするには、

ｙ切片ができるだけ多くなくては行けない。
しかし、この直線はＤに触れていなくては
いけないので、Ｂが k を最大にする。
つまり、$3x+2y=k$ が○を通ればいい。
$x+3y=15,\ 2x+y=10$ の交点は、
これを解くと $(3,4)$ これを $3x+2y=k$
$9+8=17=k$ よって、最大値１７.