指数・対数についての基本的な性質

平成１９年１１月１３日
河野愛一朗

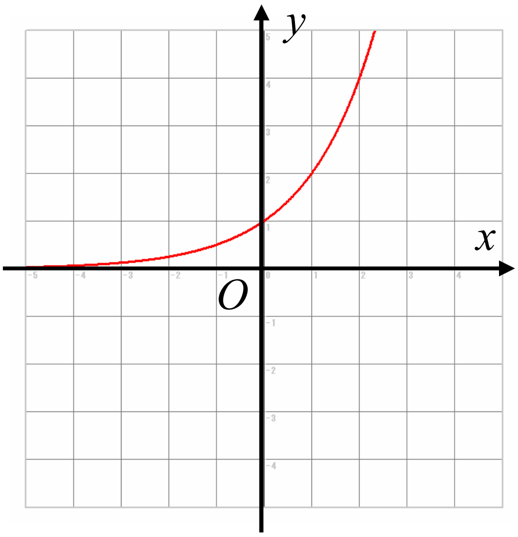
１．指数

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

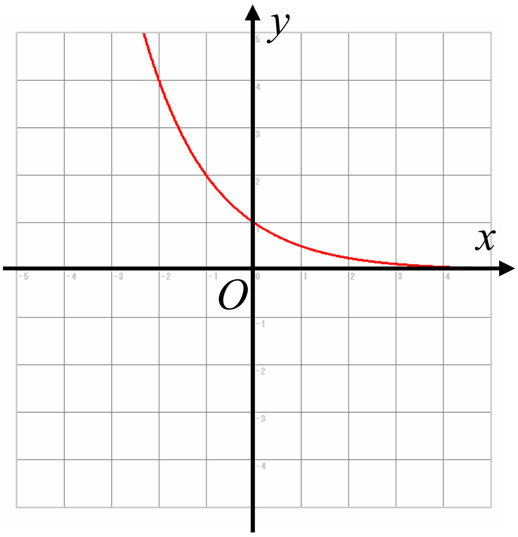
$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

＜指数関数のグラフ＞

（ア）　$y = a^n \ (a > 1)$



（イ）　$y = a^n \ (0 < a < 1)$



２．対数

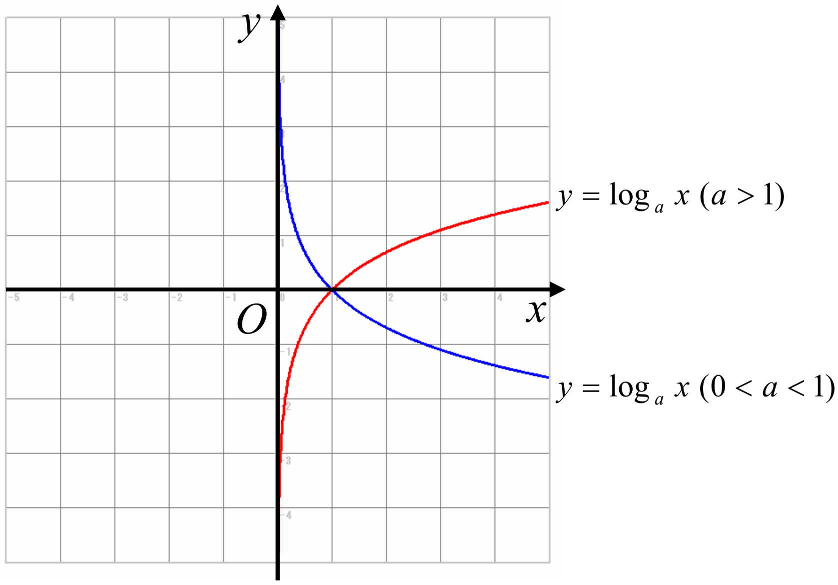
$$a^m = X \iff \log_a X = m \ (a > 0, a \neq 1, M > 0)$$

$$a^{\log_a X} = X \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y \quad \log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$$

$$\log_a X^N = N \log_a X \quad \log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$$

＜対数関数のグラフ＞

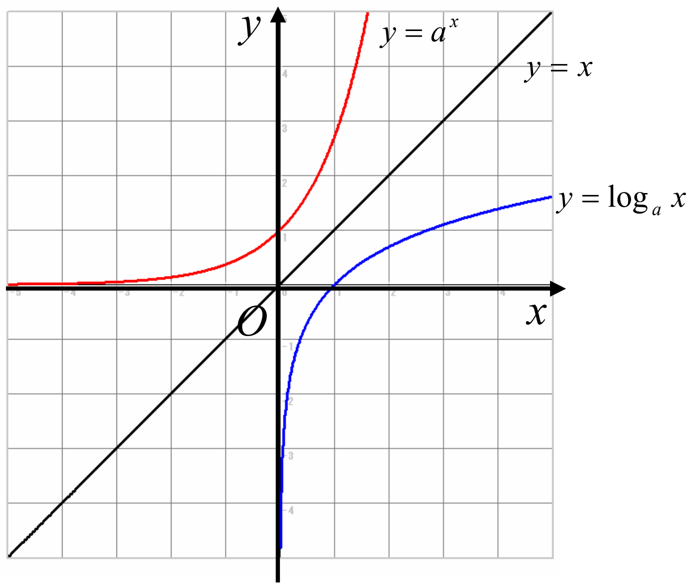


ｃｆ： $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$

よって、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ は、x と y に関して対称的

$\therefore$ xy 平面では、$y = a^x$ と $y = \log_a x$ は、$y = x$ に関して線対称となる。

以上をグラフで示したものが以下である。$(a > 1)$



付録１　指数法則の応用

$\boxed{a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \quad \text{となる理由}}$

指数法則：$a^m a^n = a^{m+n}$　・$(a^m)^n = a^{mn}$　・$(ab)^n = a^n b^n$ （m,n は正の整数）

を使って、$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$ を示す。

$a \neq 0$ とする。このとき、指数 n が 0 や負の整数の場合にも、a^n の意味を、上の指数法則が成り立つように定めよう。

まず、$n = 0$ のときに、・$a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると、

$a^m a^0 = a^{m+0}$　　つまり　　$a^m a^0 = a^m$

両辺を a^m で割って消すと　　$a^0 = 1$　だといえる。

次に、n が正の整数で、$m = -n$ のとき、・$a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると、

$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0$　　つまり　　$a^0 = 1$　より　$a^{-n} a^n = 1$

両辺を a^n で割って移項すると　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　だといえる。

ちなみに、これらを使って以下のことが言える。

・$\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$

・$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot b^{-1}\right)^n = a^n \left(b^{-1}\right)^n = a^n \cdot b^{-1 \cdot n} = a^n \cdot b^{-n} = a^n \cdot \dfrac{1}{b^n} = \dfrac{a^n}{b^n}$

（分かりにくかったら、文字に数値を代入して考えよ。）