いろいろな関数の描き方

平成１９年１１月２９日
河野愛一朗

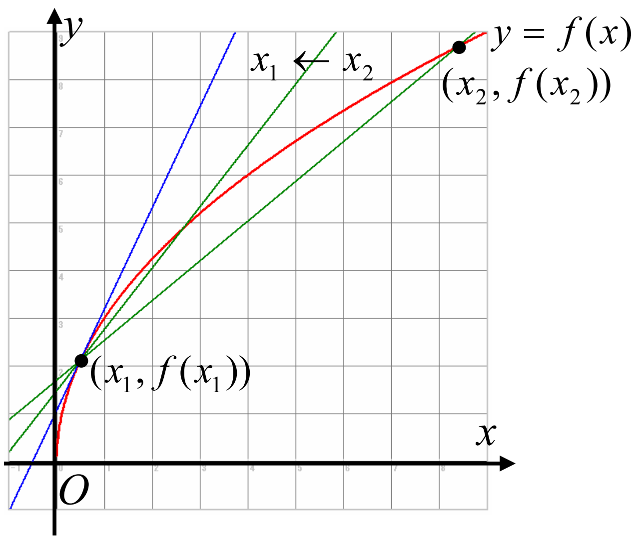
いわゆる高校の文系範囲の数学（数学ⅠＡⅡＢ）では、比例・反比例・1次関数・2次関数・３次関数・円が描ければよいことになっている。これまではその度にグラフの描き方を学んできたが、実際には、関数・方程式の種類は無数に存在する。このままでは、全ての関数の描き方を実践できないので、もっと一般的に使用できる描き方が知る必要がある。そこで、今から紹介するものは、その一般的な方法の一部である。あくまでも「一部」であるので、自ずと限界が生ずる。だが、「どうすればいいのだろう…？」と途方に暮れたり、不安にかられたりするときには、一つの指針と希望を与えてくれるものになるであろう。

１．そもそも微分は何を意味するのか？

例えば、横の曲線：$y=f(x)$ 上の２点 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ を通る直線の傾きを考える。

この傾きは、$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

そこで、x_2 をできる限り x_1 に近づける（$x_2 \to x_1$）と、この直線は、$(x_1,f(x_1))$ における $y=f(x)$ の接線になる。



つまり、この接線の傾きは、

$\lim_{x_2 \to x_1}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ であり、$x_2-x_1=h$（$x_2=x_1+h$）とすれば、

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

よって、$(x,f(x))$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは、$\lim_{h \to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ であり、これを $y=f(x)$ の微分という。

２．微分の記号

$f(x)$ の微分した式を、$\dfrac{d}{dx}f(x)$ や $\dfrac{df(x)}{dx}$ 、$f'(x)$ 、$f^1(x)$ と表す。

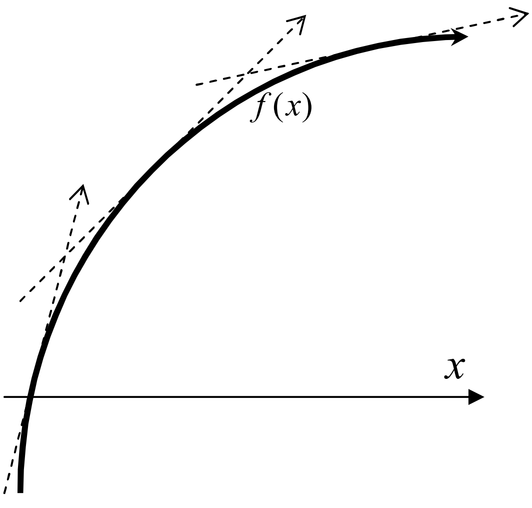
そこで、例えば、$f(x)=ax^n$ に対して、$\dfrac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を適用すると、$\underline{\dfrac{d}{dx}f(x)=anx^{n-1}}$ となることが知られている。もし、２回微分すれば、$an(n-1)x^{n-2}$ となる。

このように、何回も微分することは可能なため、微分の回数を記号に表すことが必要な場合が出てくる。$f(x)$ を n 回微分したことを表す記号は、$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ や $f^n(x)$ などである。

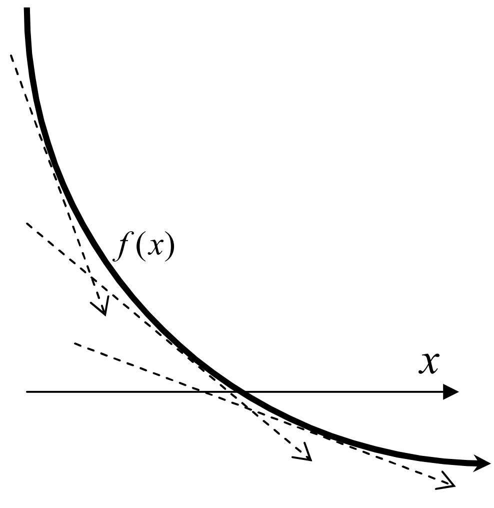
３．そもそも微分から何が分かるか？

１．でも見たように、微分した値は、接線の傾きを表す。まず、１回微分することで判明するこの値 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ が、**<u>正か負</u>**であるかによって、その関数がその接線の接点において増加中か減少中か分かる。

＜増加中：接線の傾きは正＞



＜減少中：接線の傾きは負＞



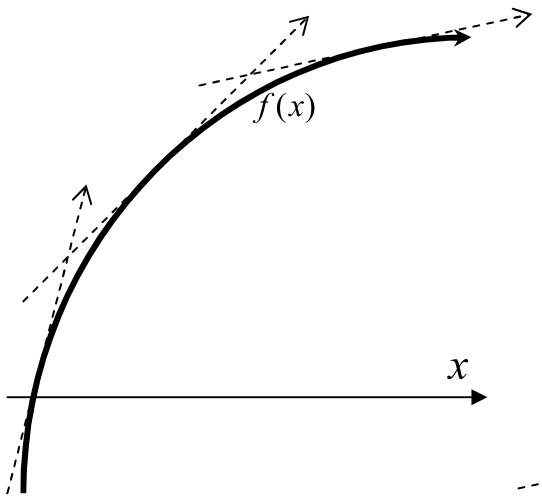
<u>※　太線が関数、破線はその接線</u>

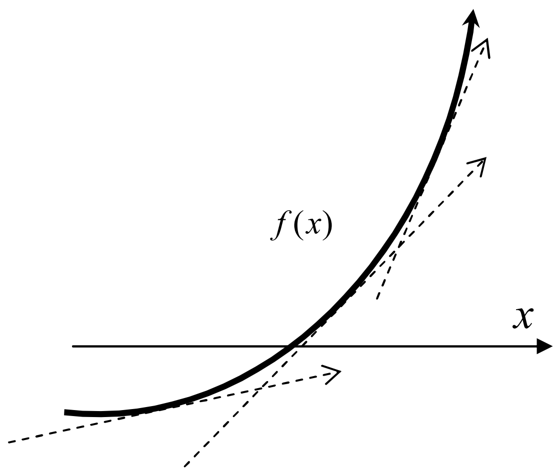
４．２回微分によって分かること

３．でも分かったように、１回微分した値が正か負かによって、微分されたものが増加中か減少中かが判別できる。よって、傾き自体が（正のときであろうが負のときであろうが）増加しているか減少しているかを調べるには、傾きを表す$\dfrac{d}{dx}f(x)$をもう一度微分した、すなわち$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$の正負を調べればよいことになる。

（１）関数は増加中：接線は正

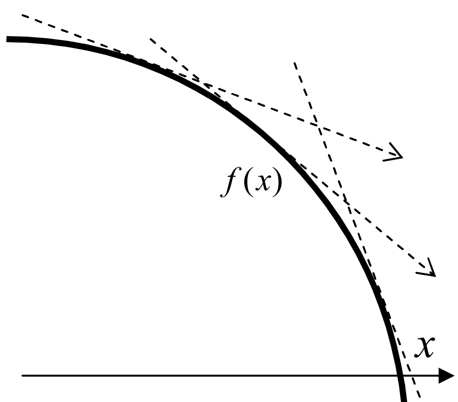
＜接線の傾きは減少中：$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)<0$＞　＜接線の傾きは増加中：$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)>0$＞

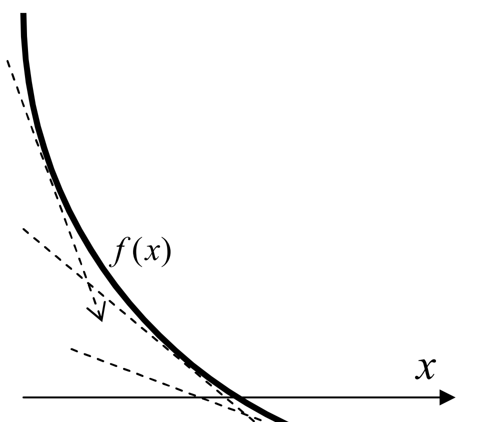




（２）関数は減少中

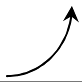
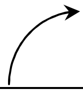
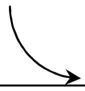
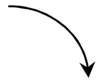
＜接線の傾きは減少中：$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)<0$＞　＜接線の傾きは増加中：$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)>0$＞





まとめると、

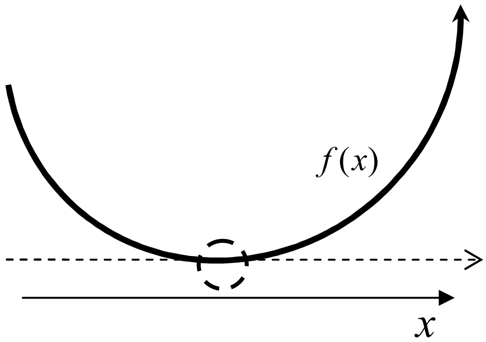
$\dfrac{d}{dx}f(x)$ が　＋　なら　↗　　　　$\dfrac{d}{dx}f(x)$ が　―　なら　↘

$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$	＋	―
$\dfrac{d}{dx}f(x)$　＋		
$\dfrac{d}{dx}f(x)$　―		

そこで、ちょっと変な場合を考える。まず、$\dfrac{d}{dx}f(x)$ が正でも負でもない、つまり 0 のときはどうなっているのだろうか。これは、増加も減少もしていない、接線の傾きが 0 の場合である。

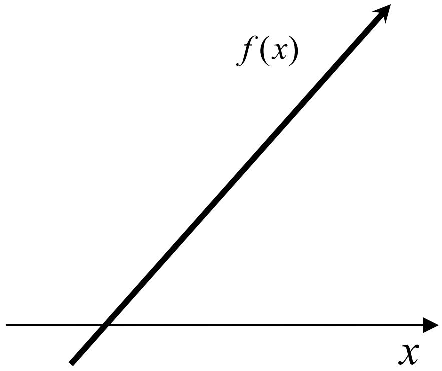
次に、$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ が 0 の場合はどうであろうか。接線の傾きが増加も減少もしていないということだから、一定の傾きを保ち続けているということである。具体的にこのように現象が見られる関数は 1 次関数である。

＜底が $\dfrac{d}{dx}f(x)=0$ ＞　　　　＜ $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)=0$ の場合＞



※接線の傾きが 0

このような場合を「極値をとる」という



※接線の傾きが一定

このような場合を単調増加（減少）という

5．３次関数で実践する

（例）$f(x)=x^3-x$　（$y=f(x)$）

まずは$\dfrac{d}{dx}f(x)$を調べる。　$\dfrac{d}{dx}f(x)=3x^2-1$より、

（１）$\dfrac{d}{dx}f(x)>0$　$\therefore x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}, x<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき　↗

（２）$\dfrac{d}{dx}f(x)=0$　$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき　極値をとる

（３）$\dfrac{d}{dx}f(x)<0$　$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}}>x>-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のとき　↘

さらに、$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$を調べる。　$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)=6x$より、

（イ）$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)>0$　$\therefore x>0$のとき　または

（ロ）$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)=0$　$\therefore x=0$のとき　（３）より、単調増加

（ハ）$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)<0$　$\therefore x<0$のとき　または

以上をまとめると、