関数についての基礎知識

早稲田大学　商学部
商業･貿易･金融コース

平成１９年１１月１８日

市田敏啓ゼミナール
河野愛一朗

目次

１．関数(Function)と比例

Ⅰ関数

▽とある集合ＡとＢがあり，Ａの各要素xに，一定の規則fによってＢの各１要素yがそれぞれ対応づけられるとき，fをＡからＢへの写像と呼び，これを“f : Ａ→Ｂ”と書き表すが，数の集合Ａから数の集合Ｂへの写像$y=f(x)$のことを関数と定義される。

▼変数x，yがあって，xのおのおのの値に対応してyの値がただひとつ決まるとき，yはxの関数であるという。

▽関数の表し方は次の４通りある。
（1）式　（2）矢印と言葉　（3）表　**（4）グラフ**
・・・(1)，(4)が一般的である。

Ⅱ変域・定義域・値域

▽関数$y=f(x)$において，xとyはともに変数であるが，変数xのとりうる値の範囲をこの関数の**定義域**といい，これに対応して定まる変数yの値の範囲をこの関数の**値域**という。関数の問題に関わらず，変数の取りうる範囲のことを**変域**という。

Ⅲ不等号などの記号について

（例）５＞２　，７≤７　，c≠０

▽　“＞”，“＜”・・・「より大きい」，「より小さい」状態を表す。その数自体は含まず，数直線上や座標上でその値の箇所を小さい“○”で表す。

▽　“≥”，“≤”・・・「以上」，「以下」の状態を表す。その数自体含み，数直線状や座標上でその値の箇所を小さい“●”で表す。

▽　“≠”・・・その値でない状態。等しくない状態。

▽これらは，変域・定義域・値域を表す際に用いる。
（例）$y = 2x$　（$-5 \leq x < 4$）

▽　“(　　,　　)”・・・値を表すときに用いる。

（例）　$x = 1$，$y = -4$　⇔　$(x, y) = (1, -4)$

ｃｆ；　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$と書いてもよい。

$\boxed{\text{Ⅳ}}$比例

▽ 関数$y = f(x)$が$y = \square x$のような式であるとき，yはxに**<u>比例</u>**するといい，□の値を**<u>比例定数（＝傾き）</u>**という。比例定数はaとおくのが一般的であるようだ。また比例定数は０でない。

▽ このとき比例定数は，$x = 1$のときのyの値に等しい。

▽ 必ず$(x, y) = (0, 0)$をみたす。

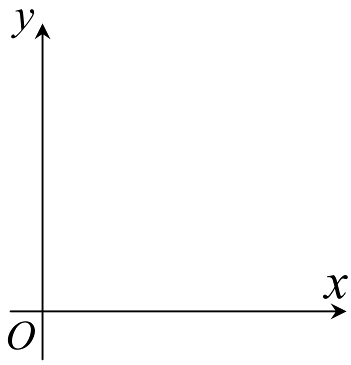
▽ yはxに比例するとき，xの値が２倍，３倍，・・・・・になればなるほど，それに対応するyの値も２倍，３倍，・・・・・となる。

▽ $y = ax$において，$(x, y) = (x_0, y_0)$，(x_1, y_1)を満たすとすると，

$a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$で求めることが出来る。

２．座標・比例のグラフ

Ⅰ座標



（１）座標平面
…右図のような，２本の数直線が両方の原点で交わっている図。一般に，垂直に交わる。

▽xの値を表す数直線のことを「**x軸**」と呼び，一般に横軸で表す。

▽yの値を表す数直線のことを「**y軸**」と呼び，一般に縦軸で表す。

▽x軸，y軸あわせて座標軸，その交点を<u>原点Ｏ</u>（オー）と呼ぶ。
（※「0」（ゼロ）ではない。）

▽以上３つは座標平面を書く上で必ず書かなくてはならない。

（２）座標

▽　（例）$x=4$，$y=3$を意味する点Ｐを，Ｐ（４，３）のように書く。
このとき，xの値をx座標，yの値をy座標と呼ぶ。

▽xy座標平面にて，

1．　$x>0$かつ$y>0$の部分・・・<u>第１象限</u>
2．　$x<0$かつ$y>0$の部分・・・<u>第２象限</u>
3．　$x<0$かつ$y<0$の部分・・・<u>第３象限</u>
4．　$x>0$かつ$y<0$の部分・・・<u>第４象限</u>

←反時計回り順。座標軸上は含まない。

☆x軸，y軸により描かれた座標平面を「xy座標平面」または「xy平面」と呼ぶ。

$\boxed{\text{Ⅱ}}$対称な点の座標

（例）（a，b）に対して

（１）x軸について対称（線対称）な点は（a，$-b$）
…y座標の符号が変わる。

（２）y軸について対称（線対称）な点は（$-a$，b）
…x座標の符号が変わる。

（３）原点について対称（点対称）な点は（$-a$，$-b$）
…両座標の符号が変わる。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$点の移動

点Ａ（x，y）をx軸方向にa，y軸方向にb移動させた点Ｂは，
Ｂ（$x+a$，$y+b$）と表すことができる。

$\boxed{\text{Ⅳ}}$幾何

（１）中点の座標

２点Ａ（x_0，y_0），Ｂ（x_1，y_1）のちょうど中間点の座標は，$\left(\dfrac{x_0+x_1}{2},\dfrac{y_0+y_1}{2}\right)$
で求まる。値が負でも気にしなくてよい。

（２）座標平面上の面積の求め方

☆単位は要らない。考えない。

①図形の内部を分割し，分割された部分の面積を求める。
②求める図形を取り囲む部分の面積を求め，余分な部分の面積を取り除く。

③その他
三角形において

イ）△ＯＡＢにおいて，Ｏ（0, 0)，Ａ（a_1, a_2），Ｂ（b_1, b_2）とすると，
△ＯＡＢ＝$\frac{1}{2}\left|a_1b_2 - a_2b_1\right|$　で求めることが出来る。

（“｜　｜” は絶対値記号。）

ロ）△ＡＢＣにおいて，Ａ（a_1, a_2），Ｂ（b_1, b_2），Ｃ（c_1, c_2）とすると，
△ＡＢＣ＝$\frac{1}{2}\left|(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)\right|$　で求めることが出来る。

$\boxed{\text{V}}$比例のグラフ

（１）比例のグラフ：$y = ax$（$a \neq 0$）のグラフは，
原点を通る直線となる。

（２）比例のグラフの特徴

１．傾き：a＞０のとき
…右上がりの直線となり，xが増加するとyも増加する。

２．傾き：a＜０のとき
…右下がりの直線となり，xが増加するとyは減少する。

（３）比例のグラフの書き方
…直線は２点によって決定するから，座標平面状の２点を書き，それを通る直線を引く。一般に、原点ともう一点が分ればよい。

（４）補足

・直角に交わる２つの一次関数の傾きの積は−１のなる。

・変域が設定されていたら実線でその部分を表し，破線で延長する。
（境界の点を明確にする。）

３．反比例

Ⅰ反比例

（１）反比例

…２つの変数x，yの間に，定数a（$a \neq 0$）を用いて，$y=\frac{a}{x}$や$xy=a$といった関係があるとき，yはxに反比例するという。aを比例定数といい，これはxとyの積であり一定である。

（２）反比例の性質

…yがxに反比例するとき，xの値が２倍，３倍,・・・・・となれば，それに対応するyのあたいは$\frac{1}{2}$倍，$\frac{1}{3}$倍,・・・・・となる。

Ⅱ反比例のグラフ

（１）反比例のグラフ

$y=\frac{a}{x}$（$a \neq 0$）のグラフは,原点に点対称な一組の滑らかな曲線となる。
これを双曲線という。

（２）特徴

１．傾き：a＞０のとき・・・グラフは第１象限と第３象限にあり,
xが増加するとyは減少する。

２．傾き：a＜０のとき・・・グラフは第２象限と第４象限にあり,
xが増加するとyも増加する。

３．$y=\frac{a}{x}$のグラフでは，x軸，y軸と交わることはない。
グラフはx軸，y軸に限りなく近づいていく。（それぞれの軸が漸近線）

（３）反比例のグラフの書き方

・ 関数を満たす，任意に数を代入することで座標をいくつか求め，滑らかな曲線で結ぶ。

・ 変域が設定されていたら実線でその部分を表し，破線で延長する。(境界の点を明確にする。)

(次のページへ)

４．比例・反比例の利用

Ⅰその他のグラフ

（１） $y=b$ のグラフ
…（$0,b$）を通り，x 軸に平行な直線となる。

☆グラフの線と y 軸の交点を y 切片という。

（２） $x=a$ のグラフ
… $(a,0)$ を通り，y 軸に平行な直線となる。

Ⅱ変数の関係

変数 V，p，T （$T \neq 0$）と定数 a によって表された式 $\dfrac{Vp}{T}=a$ について。

（１）移項により $Vp=aT$ と表すことができる。
（２）定数 V_0（$V_0 \neq 0$）により $V=V_0$ ならば，

$V_0 p=aT$ より $p=\dfrac{a}{V_0}T$，$\dfrac{a}{V_0}$ が定数から，p と T は比例関係にある。

（３）定数 p_0（$p_0 \neq 0$）により $p=p_0$ ならば，

$Vp_0=aT$ より $V=\dfrac{a}{p_0}T$，$\dfrac{a}{p_0}$ が定数から，V と T は比例関係にある。

（４）定数 T_0 により $T=T_0$ ならば，$Vp=aT_0$ より $Vp=aT_0$，aT_0 が定数から，V と p は反比例関係にある。

Ⅲグラフの利用

比例についての問題を，グラフに表すと分りやすいことがある。