微分可能性の理論と直観

早稲田大学　商学部
商業・貿易・金融コース
河野　愛一朗

＝はじめに＝

効用最大化や利潤最大化などの最適化問題を解く際に，よく微分（偏微分・全微分を含む）を行う．その際，例えば $\dfrac{d}{dx}ax^n = anx^{n-1}$ などの微分に関する公式を利用するが，本来はそれらを使用する前に，微分されるもの（上の例であれば ax^n ）がそもそも微分可能（differentiable）であるかどうかを確かめなくてはいけない．本項では，(1)<u>どのようなものが微分可能</u>であり，(2)<u>その条件</u>は何であるかを示したい．

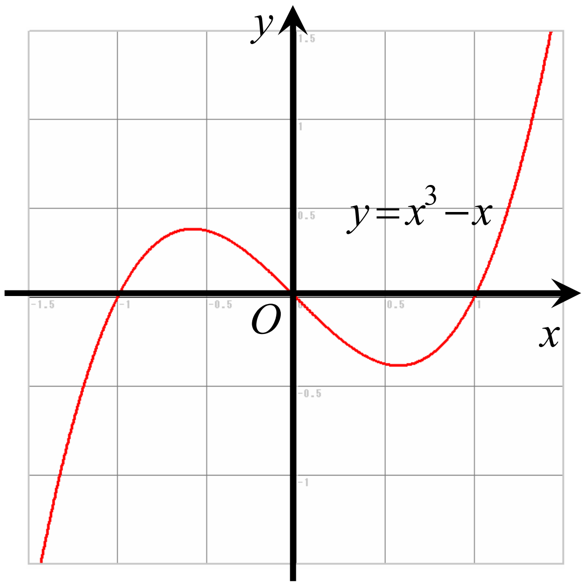
＝目次＝

１．どのようなものが微分可能であるか？（直観的な説明）

ある点（またはある区間で）微分可能であるということは，簡単にいえば，その点（またはその区間で）次の二つが生じていればよい．

（１）連続である（グラフがその点において途切れていない）．
（２）滑らかである（突然，傾きが急激に変化したりしない）．

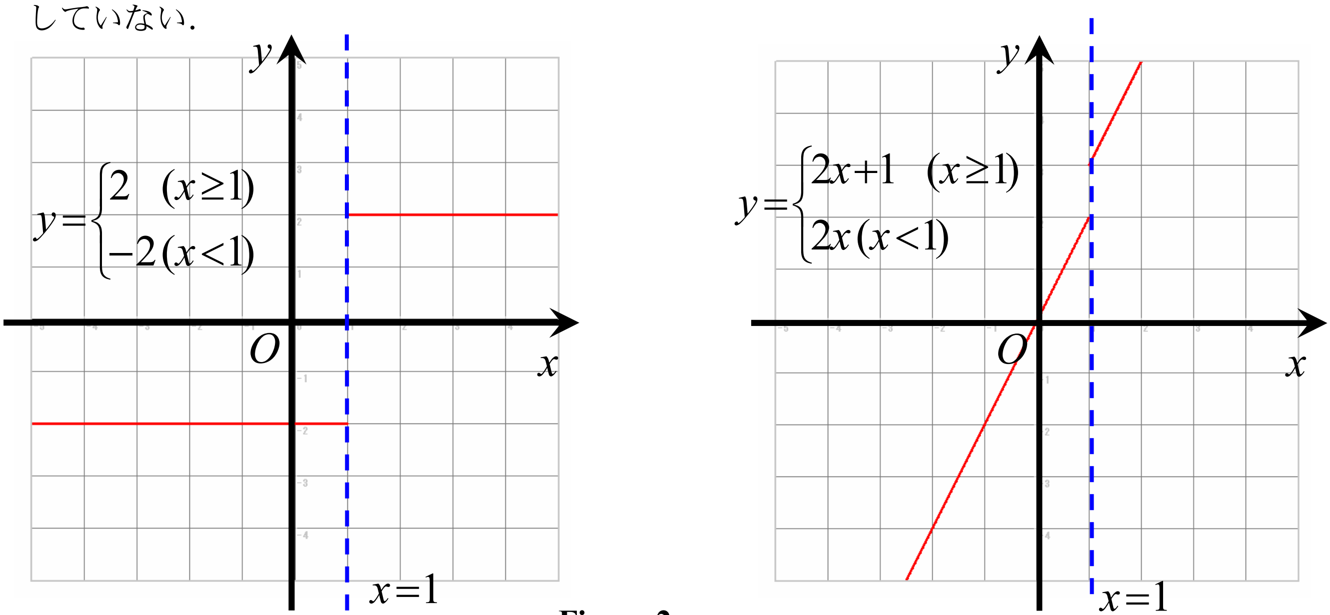
この二つを図で説明しよう．まずは，（１）かつ（２）を満たしている図形は，例えば右図のようなものになる．この関数は，すべての区間において連続だし，滑らかである．つまり，すべての区間で，x で微分できるといえる．



=Figure 1=

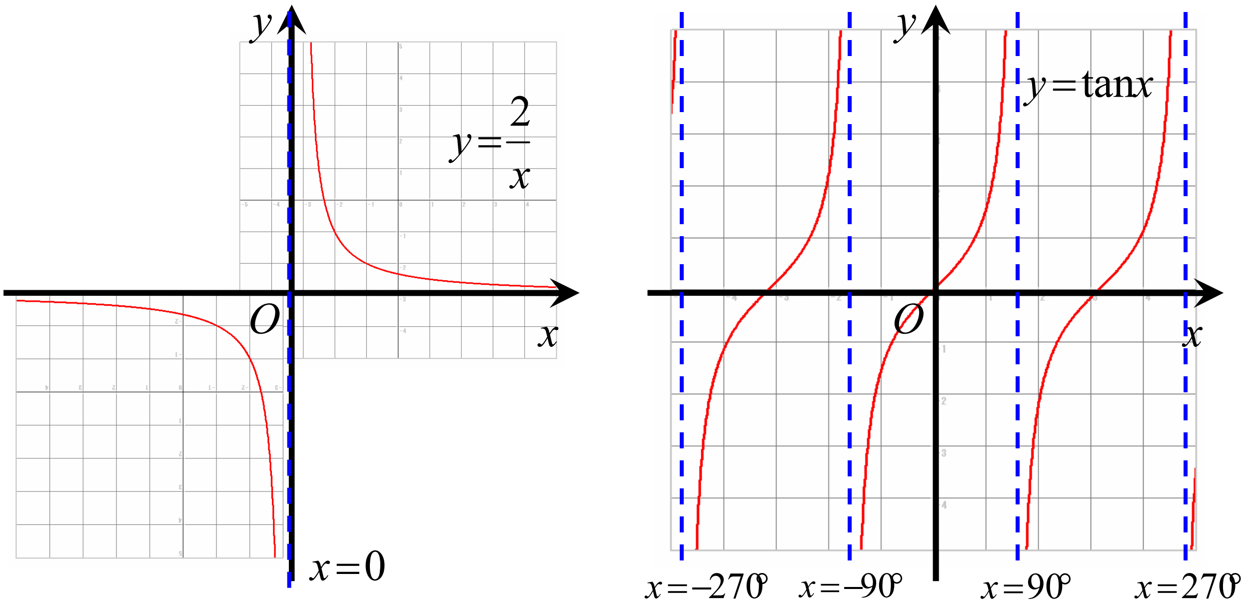
１．１　連続でない例

では，微分可能性を満たしていないのはどのような場合であろうか．まず，連続していないケースを取り上げる．以下は，ある点において，連続性を満たしていない．



=Figure 2=

この二つはいずれも，$x=1$を境に二つの方程式から成り立つ関数である．結果，いずれも$x=1$において連続で無く，微分可能でない．では，次は一つの方程式であるにもかかわらず，連続でないケースである．



=Figure 3=

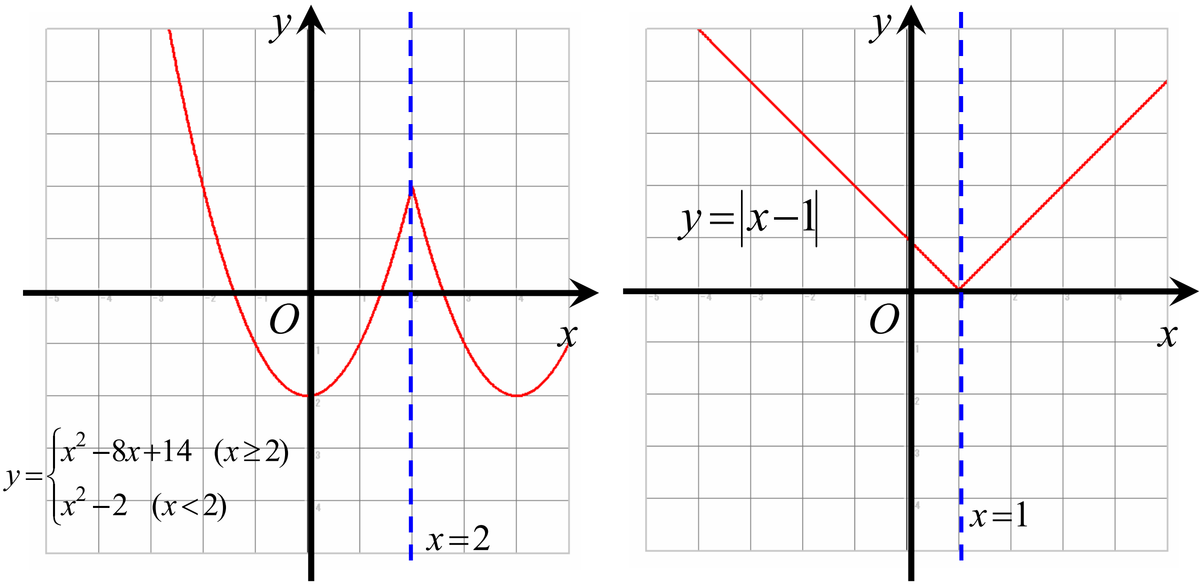
Figure3 の左は反比例のグラフである．単純な一つの方程式から成り立っているにも，かかわらず，$x=0$ の直線が漸近線[1]になっており，$x=0$ では連続していない．右も同様な例である．tan の周期と同じく，微分不可能な箇所が 180°ごとに繰り返されている[2]．

[1] 漸近線とは，ある曲線が限りなく近づいていくが，絶対に交わることのできない直線.

[2] tan(tangent)とは，傾きと訳す．水平方向に対し x 度の傾きがある直線の傾きが，tan x の値である. このとき, 水平方向から 90°や 270°などの傾きがあるとき, この直線は垂直になる. 垂直であるということは，傾きが無限になり値をとれない．だから，90°や 270°などの角度のとき，tan の値が取れないので，このとき tan の関数は連続でなくなる．

１．２　なめらかでない例

なめらかでないということは，突然，傾きが急激に変化してしまうことである．つまり，ある点でなめらかでないということは，その点のすぐ左側の接線の傾きとすぐ右側の接線の傾きが異なるということである（これについては，あとで詳しく述べる）．このような例は以下のようになる．

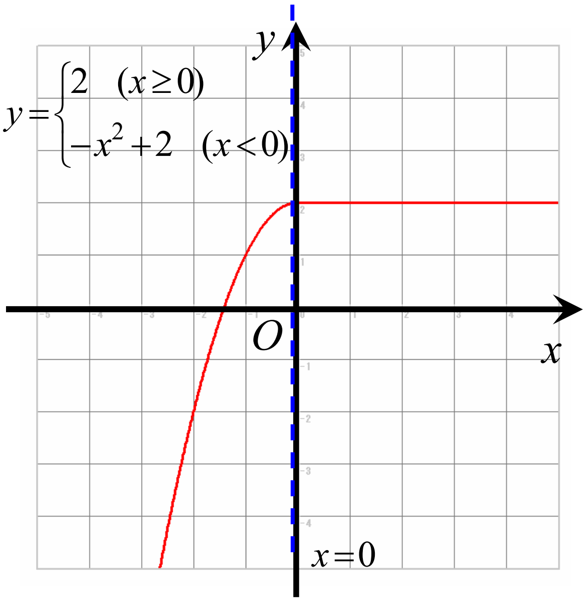


=Figure 4=

まず，Figure4 の左から検討しよう．これは，二つの方程式から成り立っているが連続性を保っている例である．しかし，$x=2$ においてなめらかではない．右は一つの方程式から成り立っている関数である．しかし，この方程式には絶対値が使用されている．このように，絶対値が使用されている関数は滑らかでない場合が多いが，それは実質的には二つの方程式から構成されているのと同じだからである．絶対値をはずせば，この関数は $y=\begin{cases}x-1\,(x\geq 1)\\ -x+1\,(x<1)\end{cases}$ となる．結果，$x=1$ でなめらかではなくなっている．$x=1$ の左では傾きは常に-1，$x=1$ の右では傾きは常に 1 である．つまり，$x=1$ において，傾きが急激に変化しているといえる．よって，なめらかといえない．

１．３　二つの方程式から成り立つが，連続でなめらかである例

１．２のなめらかでない場合は，どちらも二つの方程式から成り立つ関数であった．では，複数の方程式から成り立つ関数はそのつなぎ目で常になめらかでないのだろうか．実際には，そうでない．以下は，二つの方程式から成り立ち，さらにすべての区間でなめらかである例である．



=Figure 5=

$x=0$ が関数のつなぎ目になっている．左側の方程式は２次関数だが，$x=0$ において頂点であり，傾きが０である．右側の方程式も，水平で傾きは０である．よって，左右の傾きが０で一致するので，なめらかさを保っている．

１．４　なめらかさの直観的な検証

１．２と１．３では，連続である場合に，なめらかであるときと，なめらかでないときを取り上げた．１．２の方は明らかになめらかでないが，１．３はグラフだけを見ても微妙である．では，グラフではなめらかさの検証はできないのだろうか．これに関しては，導関数（derivative）[3]をグラフに描けば，直観的な判断が可能となる．

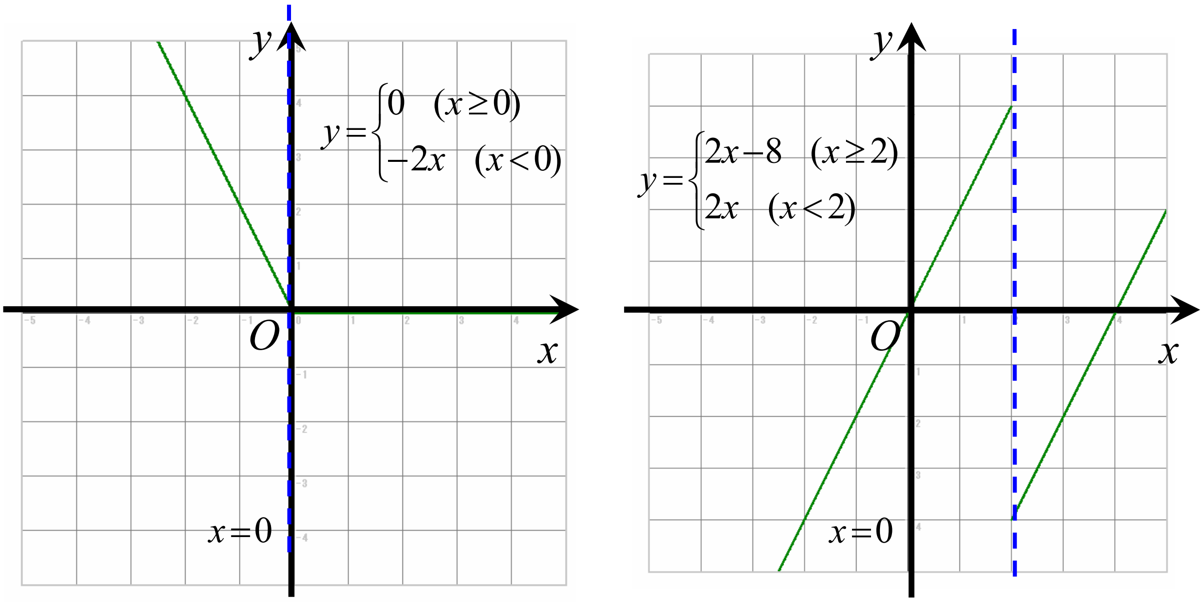
[3] 導関数とは，微分して求められた関数のこと．例えば，$y=x^2$ の導関数は，$y=2x$．

そこで，ここでは Fugure5（２つの方程式から成り立ち連続で<u>なめらか</u>で，これを①とする）と Figure4（２つの方程式から成り立ち連続だが<u>なめらかでない</u>，これを②とする）の左でとりあげたものを使って説明しよう．それぞれの導関数を求める．

$$① \quad y=\begin{cases} 2 & (x\geq 0) \\ -x^2+2 & (x<0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'=\begin{cases} 0 & (x\geq 0) \\ -2x & (x<0) \end{cases}$$

$$② \quad y=\begin{cases} x^2-8x+14 & (x\geq 2) \\ x^2-2 & (x<2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'=\begin{cases} 2x-8 & (x\geq 2) \\ 2x & (x<2) \end{cases}$$

これを描くと次のようになる．



=Figure 6=

よって，なめらかである場合には，導関数が連続であり，そうでないときには導関数が連続しない．つまり，導関数を描くことによって，微分可能性の一つのなめらかさが確認できた．

では，導関数が連続であれば，必ず微分可能なのだろうか．答えは，そうでない．例えば，Figure 2 の二つの関数は，非連続とはいえ，常に傾きは一定である．よって，もしこれの導関数を描けば，連続な直線（しかも水平）が描けるはずである．

つまりまとめると，関数のある定義域[4]において微分可能であるためには，その定義域においてその**関数が連続**であり，かつ，その**導関数も同じ定義域において連続**であることが必要といえる．

２．微分可能条件（厳密な定義）

本稿では１．と異なり，直観的でなく，微分可能条件についての厳密な定義を示したい．

２．１　微分の定義の復習と微分可能条件

$x \to y$ である関数 $y = f(x)$ を考える．
この関数の x が変化したとき y も変化するが，y の x に対する変化率[5] $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ は，$\triangle y$ を $\triangle x$ で表す．$\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x)$　よって，

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

ここで，$\triangle x$ を限りなく 0 に近づけてみる（$\triangle x \to 0$）．このような $\triangle x$ を dx と書く．このとき，y は x に従属するので，$\triangle y$ も限りなく 0 に近づくはずである（$\triangle y \to 0$）．x と同様に，$\triangle y$ を dy と書く

そこで，$\triangle x \to 0$ のとき $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ を考えれば，

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$ [6]

この値を求めることが微分である．よって，$x = a$ によって，**微分可能であ**

[4] 定義域とは，例えば $x \to y$ である関数 $y = f(x)$ であれば，x のとる範囲が定義域といえる．
[5] このような変化率を平均変化率という．
[6] $\frac{dy}{dx}$ は接線の傾きを示す．

るということは，$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$ [7]が存在するということに他ならない．

さて，先ほどの定義は，極限値が存在する（lim できるということ）ことが前提であった．そこで，厳密に微分可能性を定義するには，極限が存在することも付け加えなくてはならない．

極限が存在するということは，変数の近づき方（大きい方から近づくのか，小さい方から近づくのか）に関係なく，極限値が一つの一つの値に収束することである．つまり，

$$\lim_{\triangle x \to 0-} \frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0+} \frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$ [8] [9]…（＊）

これが存在し成立する必要がある．これは，$x=a$ において微分可能であることの必要十分条件であり，極限値が存在することも含めた微分可能の条件となる．

２．２　厳密な微分可能条件と直観的な条件の整合性

そこで，条件式（＊）と，１．で述べてきた直観的な微分可能条件の整合性を確認したい．直観的な条件は，「連続であること」と「なめらかであること」である．

まず，なめらかさについては問題ないだろう．なめらかであることは，微分を行う点のすぐ左側の接線の傾きとすぐ右側の接線の傾きが一致するというこ

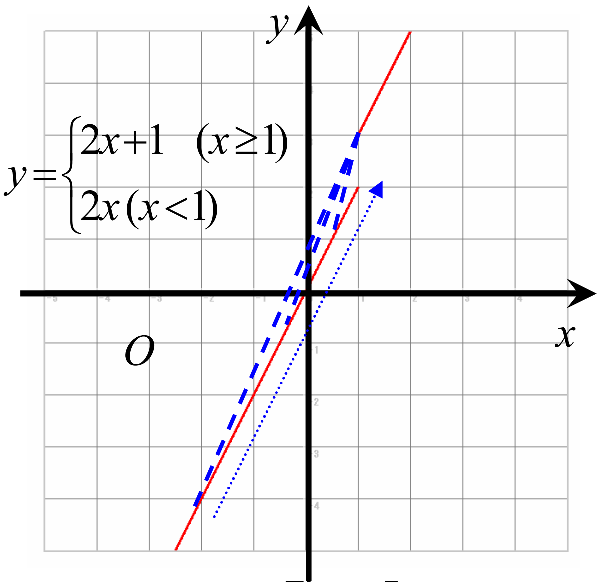
[7] このとき，$x=a$ なので，$y=f(x)\big|_{x=a}$ から $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)\big|_{x=a}$ この値を微分係数（differential coefficient）という．つまり微分係数とは，導関数の独立変数（x みたいなもの）に定数を代入したものといえる．

[8] $\triangle x \to 0-$ とは，小さい方から 0 に近づけた極限を指し，$\triangle x \to 0+$ は，大きい方から 0 に近づけた極限を指す．

[9] $\triangle x \to 0-$ のときの微分係数を左側微分係数（left-hand derivative），$\triangle x \to 0+$ のときの微分係数を右側微分係数（right-hand derivative）という．

とである．そこで，（＊）の両辺は接線の傾きである $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたのであり，（＊）の式は，左辺が左側の接線の傾き，右辺が右側の接線の傾きであり，それらが等しいということをそのまま示しているわけである．

おそらく，戸惑うのは（＊）が連続性も意味していることであろう．そこで，Figure1 で連続でないケースとして紹介した図を再掲する．



=Figure 7=

上の関数を構成する 2 つの方程式 $y=2x+1\quad(x\geq 1)$，$y=2x\,(x<1)$ について考えよう．いずれも，右辺を微分すれば 2 になるので，$x=1$ において左右の微分係数が一致し，（＊）を満たしそうである．しかし，実際はそうではなく，$x=1$ における右側極限値（＊の左辺）が∞となり，等式が成立しない．なぜならば，微分係数は $\dfrac{dy}{dx}$ の値であり，元をたどれば平均変化率 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ である．平均変化率は，2 点の線分の傾きだが，今回，$x=1$ は $y=2x+1\quad(x\geq 1)$ に含まれており，$y=2x\,(x<1)$ の点が $x=1$ に進んで極限していく際，図の破線に表れているように，左側微分係数の値が際限なく上昇し続ける．対して，右側極限では，$x=1$ は $y=2x+1\quad(x\geq 1)$ に含まれており，右側微分係数の値が 2 のままである．$\infty\neq 2$ より，（＊）は成立しない．

そこで，左側の $y=2x\,(x<1)$ が $x=1$ も含み，$y=2x\,(x\leq 1)$ であれば問題ないと

いうものがいるのかもしれない．このとき，確かに左右の微分係数は 2 になり，（＊）が成立する．しかし，この場合， $y=\begin{cases}2x+1 & (x\geq 1)\\ 2x & (x\leq 1)\end{cases}$ において，独立変数 $x=1$ において，従属変数 y が 2,3 と 2 つの値をとる．そもそも，独立変数に対して，従属変数が複数の種類の値をとる方程式を，関数とは呼ばない．よって，やはり，（＊）が関数の微分可能性を示したものであるといえるのである．

３．微分可能性の検証

本項では，２でならった微分可能の条件式を実際に考え，使えるようにすることが目的である．以下の①②は１．４で取り上げたものと同じである．

① $y=\begin{cases}2 & (x\geq 0)\\ -x^2+2 & (x<0)\end{cases}$ の $x=0$ における微分可能性

＜検討＞

$y=f(x)$ と考える．(＊)においては $a=0$ より，

左側極限は，

$$\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(\triangle x)-f(0)}{\triangle x}$$

$f(0)$ は $f(x)=2\ (x\geq 0)$ に $x=0$ を代入したものであり，$f(\triangle x)$ は

$\triangle x\to 0-<0$ より，$f(x)=-x^2+2\quad(x<0)$ に $x=\triangle x$ を代入したものである．

$$\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{\left\{-(\triangle x)^2+2\right\}-2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{-(\triangle x)^2}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0-}(-\triangle x)=0$$

右側極限も同様にして，$x\geq 0$ においては，$y=2$ より，$f(x)=2$

$$\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{2-2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{0}{\triangle x}=0$$

よって, 左右の微分係数が一致するので，$x=0$ において, 微分可能といえる．

② $y=\begin{cases} x^2-8x+14 & (x\geq 2) \\ x^2-2 & (x<2) \end{cases}$ の $x = 2$ における微分可能性

＜検討＞

$y=f(x)$ と考える．(∗)においては $a = 2$ より，

左側極限は，

$$\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(\triangle x+2)-f(2)}{\triangle x}$$

この $f(2)$ は，$x^2-8x+14 \quad (x\geq 2)$ に $x = 2$ を代入したものである．

よって，$f(2)=2$

$$\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{\left\{(\triangle x+2)^2-2\right\}-2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{\left\{(\triangle x)^2+4\triangle x+4\right\}-4}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0-}\frac{(\triangle x)^2+4\triangle x}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0-}(\triangle x+4)=0$$

右側極限も同様にして，$\triangle x \to 0+$ から $a+\triangle x>a\geq 2$ より，

$\displaystyle\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$ における $f(x)$ はすべて，$x^2-8x+14 \quad (x\geq 2)$

$$\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0+}\frac{\left\{(\triangle x+2)^2-8(\triangle x+2)+14\right\}-2}{\triangle x}$$

$$=\cdots=-4$$

よって，0≠-4 から左右の微分係数が一致しないので，$x = 2$ において，微分可能ではない．