数理ファイナンス

平成 20 年 1 月 8 日提出課題

1F040402-8 河野愛一朗

※以下、$P(X)$、$E(X)$、$V(X)$ とは、それぞれ、事象 X が発生した際の確率、期待値、分散を示すとする。

☆２１日営業日（１ヶ月）経った後の粗収益率の自然対数 ＝$\ln R_{21D}$ の確率分布

● 日々収益率から計算される，一ヶ月(後)の株価粗収益率の対数をとったもの，Ln(R_{21D})，の分布を描いてみよ

谷川寧彦「数理ファイナンス」第１９回目のパワーポイント及び、補助教材である“ノートブック”によれば、以下の通り。

上昇のときの変化率	u_D	1.01074
下降のときの変化率	d_D	0.98823
上昇の確率	$P(u_D)$	0.529535
下降の確率	$P(d_D)$	0.470465

＝表１（１日において）＝

確率分布は、横軸に確率変数である $\ln R_{21D}$ の値を取り、縦軸にその実現の確率である $P(\ln R_{21D}) = P(R_{21D})$ をとる。

営業日の日数（期間）を $\mathrm{N}(=21)$、上昇の回数を $\mathrm{n}\,(0 \le \mathrm{n} \le 21 \mid \forall \mathrm{n} \in \mathrm{Z})$ とすれば、下降の日数は $\mathrm{N-n}$

よって、$0 \le \mathrm{n} \le 21 \mid \forall \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$ において、

・$\ln R_{21D} = \mathrm{n} \cdot \ln(\mathrm{u_D}) + (\mathrm{N-n})\ln(\mathrm{d_D})$

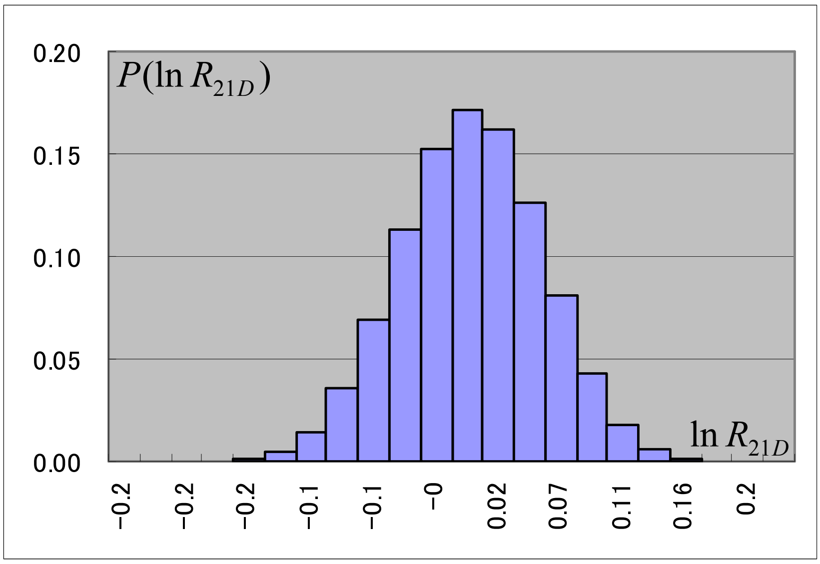
・$P(\ln R_{21D}) = P(R_{21D}) = {}_N C_n \mathrm{P(u_D)^n P(d_D)^{N-n}} = \dfrac{\mathrm{N!}}{\mathrm{n!(N-n)!}}\mathrm{P(u_D)^n P(d_D)^{N-n}}$

上の表１の数値を当てはめて、この２つの値についてシミレーションした結果は以下の通り（シミュレーションではExcelを使用）。

n	確率	確率変数
	P(ln(R21D))	ln(R21D)
	(N!/(n!(N−n)!)*(P(uD)^n)*P(dD)^(N−n)	n*ln(uD)+(N−n)*ln(dD)
0	0.0000001328	−0.248636111
1	0.0000031381	−0.22611356
2	0.0000353206	−0.20359101
3	0.0002517836	−0.181068459
4	0.0012752851	−0.158545908
5	0.0048803789	−0.136023358
6	0.0146483809	−0.113500807
7	0.0353305334	−0.090978256
8	0.0695914031	−0.068455706
9	0.1131419831	−0.045933155
10	0.1528172510	−0.023410604
11	0.1720044701	−0.000888054
12	0.1613339765	0.021634497
13	0.1257165186	0.044157048
14	0.0808577492	0.066679598
15	0.0424713220	0.089202149
16	0.0179264543	0.1117247
17	0.0059344822	0.13424725
18	0.0014843546	0.156769801
19	0.0002637987	0.179292351
20	0.0000296920	0.201814902
21	0.0000015914	0.224337453
合計	1.0000	

＝表２＝

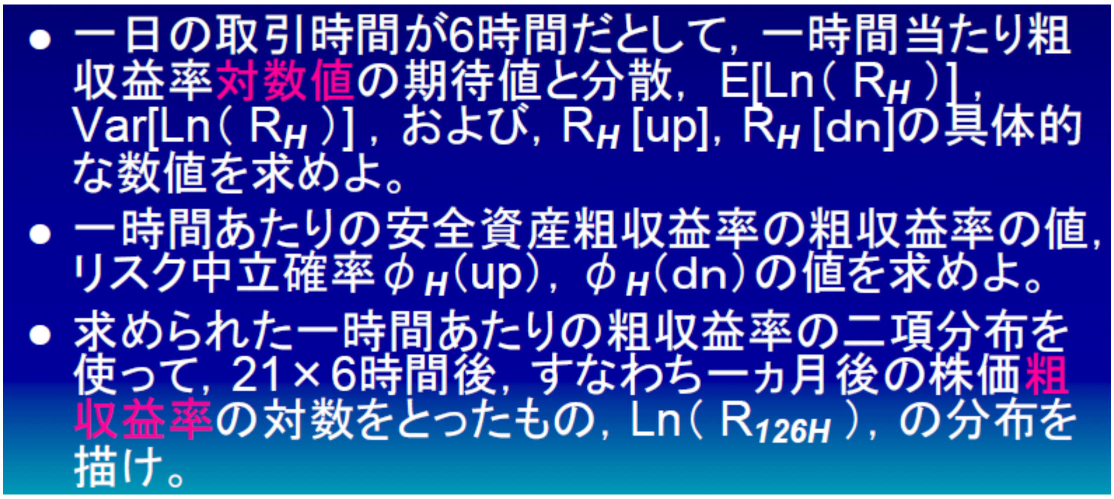
横軸に$\ln R_{21D}$、縦軸に$P(\ln R_{21D})$として、上の表に基づき描かれた確率分布は以下の通り。



＝図 1 ＝

（次のページへ）

☆これまでの話を１時間ごとに考える。



谷川寧彦「数理ファイナンス」第１９回目のパワーポイント及び、補助教材である“ノートブック”によれば、以下の通り。

上昇のときの変化率	u_M	1.05296
加工のときの変化率	d_M	0.949701
上昇の確率	$P(u_M)$	0.5328
下降の確率	$P(d_M)$	0.4672
期待値	$E(\ln(R_M))$	0.003385
分散	$V(\ln(R_M))$	0.002652
月次の安全資産粗利益率	r_M	1.00317

＝表３（１ヶ月において）＝

※１ヶ月当たりの粗利益率を R_M とする。

● １時間当たりの粗利益率（R_H とする）の対数値

１ヶ月の取引日数は２１日、１日の取引時間は６時間
よって、１ヶ月の取引時間は２１×６＝１２６時間である。

$$\therefore \quad E(\ln R_H) = \frac{E(\ln R_M)}{126} \quad \text{かつ} \quad V(\ln R_H) = \frac{V(\ln R_M)}{126}$$

よって、上の表３の値を代入して、

期待値：$E(\ln R_H) = \dfrac{0.003385\cdots}{126} = 0.000026869$

分散：$V(\ln R_H) = \dfrac{0.002651\cdots}{126} = 0.0000210473$

また、同様に１ヶ月の取引時間は１２６時間であることから、

$$\ln u_H = E(\ln R_H) + \frac{\ln u_M - E(\ln R_M)}{\sqrt{126}}$$

よって、上の表３の値を代入して、

$\therefore \quad u_H = e^{E(\ln R_H) + \frac{\ln u_M - E(\ln R_M)}{\sqrt{126}}}$ 　　$u_H = 1.0043322553559808$

また、

$$\ln d_H = E(\ln R_H) + \frac{\ln d_M - E(\ln R_M)}{\sqrt{126}}$$

よって、上の表３の値を代入して、

$\therefore \quad d_H = e^{E(\ln R_H) + \frac{\ln d_M - E(\ln R_M)}{\sqrt{126}}}$ 　　$d_H = 0.9951394831804208$

● １時間当たりの安全資産粗利益率（r_Hとする）の対数値
　リスク中立確率（１時間ごとの上昇：$P(u_H)$、減少：$P(d_H)$ ）

　まず、１ヶ月の取引時間は１２６時間であることから、

$r_H = r_M^{\frac{1}{126}}$ 　（複利だとする）

上の表３の値を代入して、$r_H = 1.00317^{\frac{1}{126}} = 1.00003$

２項モデルの性質により、$P(u_H) = \dfrac{r_H - d_H}{u_H - d_H}$、$P(d_H) = \dfrac{u_H - r_H}{u_H - d_H}$

これに、上の表３の値および前の問題の結果を代入して、

$\underline{P(u_H) = 0.531467}$ 、$\underline{P(d_H) = 0.468533}$

●１２６時間（１ヶ月）経った後の粗収益率の自然対数
＝$\ln R_{126H}$ の確率分布

前の問題までにおいて、求めたことをまとめれば、

上昇のときの変化率	$u_H = 1.00433225\,53559808$
下降のときの変化率	$d_H = 0.99513948\,31804208$
上昇の確率	$P(u_H) = 0.531467$
下降の確率	$P(d_H) = 0.468533$

＝表４（１時間において）＝

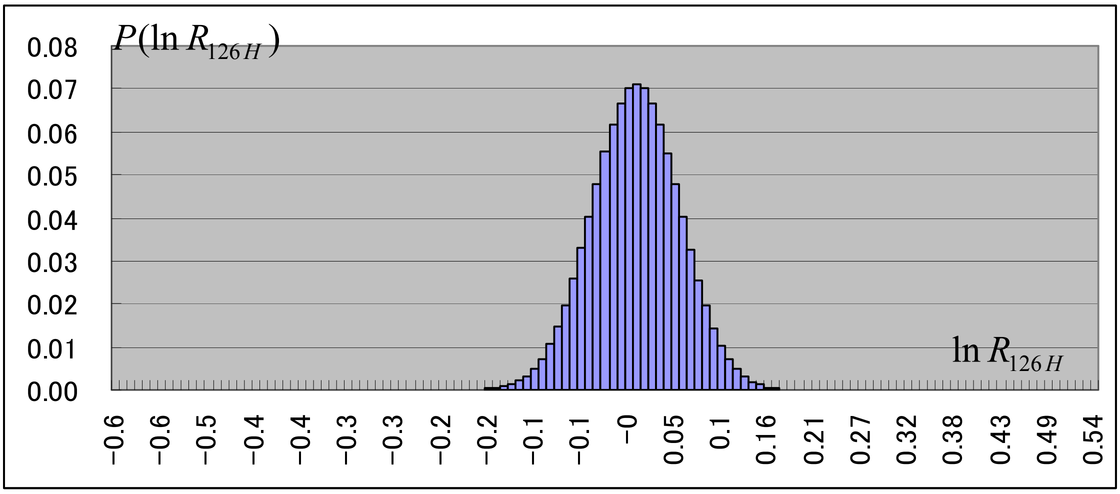
確率分布は、横軸に確率変数である $\ln R_{126H}$ の値を取り、縦軸にその実現の確率である $P(\ln R_{126H}) = P(R_{126H})$ をとる。

期間（時間）を $\mathrm{N}(=126)$ 、上昇の回数を $\mathrm{n}\,(0 \le \mathrm{n} \le 126 \mid \forall \mathrm{n} \in \mathrm{Z})$ とすれば、下降の日数は $\mathrm{N - n}$

よって、$0 \le \mathrm{n} \le 126 \mid \forall \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$ において、
・$\ln R_{126H} = \mathrm{n} \cdot \ln(\mathrm{u_H}) + (\mathrm{N - n})\ln(\mathrm{d_H})$
・$P(\ln R_{126H}) = P(R_{126H}) = {}_N C_n \mathrm{P(u_H)^n P(d_H)^{N-n}} = \dfrac{\mathrm{N!}}{\mathrm{n!(N - n)!}} \mathrm{P(u_H)^n P(d_H)^{N-n}}$

表４の数値を当てはめて、この縦軸と横軸の値についてシミレーションしたものを表にまとまる。横軸に $\ln R_{21D}$ 、縦軸に $P(\ln R_{21D})$ として、上の表に基づき描かれた確率分布は次のページの通り。

$\ln R_{126H}$ の確率分布



＝図２＝

上の表４の数値を当てはめて、この縦軸と横軸の値についてシミレーションした結果を表にしたものは以下の通り（シミュレーションではExcelを使用）。上の図はこれを表したものである。

n	確率	確率変数
	P(ln(R126H))	ln(R126H)
	(N!/(n!(N−n)!)*(P(uH)^n)*P(dH)^(N−n)	n*ln(uH)+(N−n)*ln(dH)
0	0.000000000000000000000000000000	−0.613918311
1	0.000000000000000000000000000000	−0.604723045
2	0.000000000000000000000000000000	−0.59552778
3	0.000000000000000000000000000000	−0.586332514
4	0.000000000000000000000000000000	−0.577137248
5	0.000000000000000000000000000000	−0.567941982
6	0.000000000000000000000000000000	−0.558746717
7	0.000000000000000000000000000001	−0.549551451
8	0.000000000000000000000000000011	−0.540356185
9	0.000000000000000000000000000167	−0.53116092
10	0.000000000000000000000000002215	−0.521965654
11	0.000000000000000000000000026498	−0.512770388
12	0.000000000000000000000000288048	−0.503575123
13	0.000000000000000000000002865245	−0.494379857

14	0.000000000000000000000026233024	−0.485184591
15	0.000000000000000000000222183207	−0.475989325
16	0.000000000000000000001748438437	−0.46679406
17	0.000000000000000000012833060084	−0.457598794
18	0.000000000000000000088149598601	−0.448403528
19	0.000000000000000000568364065549	−0.439208263
20	0.000000000000000003449185190400	−0.430012997
21	0.000000000000000019748731343328	−0.420817731
22	0.000000000000000106915811992740	−0.411622466
23	0.000000000000000548382466368334	−0.4024272
24	0.000000000000002669596732255970	−0.393231934
25	0.000000000000012354977069550500	−0.384036668
26	0.000000000000054440999264685200	−0.374841403
27	0.000000000000228716998203490000	−0.365646137
28	0.000000000000917300698711055000	−0.356450871
29	0.000000000003516219035195700000	−0.347255606
30	0.000000000012896222539422700000	−0.33806034
31	0.000000000045301040427868100000	−0.328865074
32	0.000000000152552005744685000000	−0.319669809
33	0.000000000492910369218093000000	−0.310474543
34	0.000000001529354285757670000000	−0.301279277
35	0.000000004559991215460480000000	−0.292084011
36	0.000000013074919273381500000000	−0.282888746
37	0.000000036075795805202600000000	−0.27369348
38	0.000000095842569548778700000000	−0.264498214
39	0.000000245308520047517000000000	−0.255302949
40	0.000000605212671279085000000000	−0.246107683
41	0.000001439987510468440000000000	−0.236912417
42	0.000003305707926921490000000000	−0.227717152
43	0.000007325064079672110000000000	−0.218521886
44	0.000015673751707805400000000000	−0.20932662
45	0.000032397419534739900000000000	−0.200131354
46	0.000064710346549644000000000000	−0.190936089
47	0.000124940135689980000000000000	−0.181740823
48	0.000233251231702862000000000000	−0.172545557

49	0.000421171123225618000000000000	−0.163350292
50	0.000735724852155384000000000000	−0.154155026
51	0.001243640799069640000000000000	−0.14495976
52	0.002034646658249340000000000000	−0.135764495
53	0.003222411272876060000000000000	−0.126569229
54	0.004941356492190570000000000000	−0.117373963
55	0.007337567551955640000000000000	−0.108178697
56	0.010552577559089400000000000000	−0.098983432
57	0.014700017633679400000000000000	−0.089788166
58	0.019836957892436700000000000000	−0.0805929
59	0.025933915477868500000000000000	−0.071397635
60	0.032849424239684100000000000000	−0.062202369
61	0.040316050550173300000000000000	−0.053007103
62	0.047944165824023400000000000000	−0.043811838
63	0.055247331991277500000000000000	−0.034616572
64	0.061689038874353600000000000000	−0.025421306
65	0.066745571398157400000000000000	−0.01622604
66	0.069975252357637200000000000000	−0.007030775
67	0.071081574581435800000000000000	0.002164491
68	0.069957818298135000000000000000	0.011359757
69	0.066703907958299400000000000000	0.020555022
70	0.061611844797631000000000000000	0.029750288
71	0.055122640056574000000000000000	0.038945554
72	0.047763519558271900000000000000	0.048140819
73	0.040077750703898000000000000000	0.057336085
74	0.032559940900856400000000000000	0.066531351
75	0.025607183094446900000000000000	0.075726617
76	0.019491915012571600000000000000	0.084921882
77	0.014357205176536500000000000000	0.094117148
78	0.010230750717292300000000000000	0.103312414
79	0.007051114505894310000000000000	0.112507679
80	0.004698960095550750000000000000	0.121702945
81	0.003026987923527300000000000000	0.130898211
82	0.001884280129158140000000000000	0.140093476
83	0.001133068512712660000000000000	0.149288742

84	0.000657932680545347000000000000	0.158484008
85	0.000368763511870620000000000000	0.167679274
86	0.000199420346403761000000000000	0.176874539
87	0.000104003109379646000000000000	0.186069805
88	0.000052283466808640100000000000	0.195265071
89	0.000025321771506572700000000000	0.204460336
90	0.000011808355481174400000000000	0.213655602
91	0.000005298911251011340000000000	0.222850868
92	0.000002286667300415750000000000	0.232046133
93	0.000000948276675364874000000000	0.241241399
94	0.000000377621987121839000000000	0.250436665
95	0.000000144284528588501000000000	0.259631931
96	0.000000052850164596546000000000	0.268827196
97	0.000000018540950021409800000000	0.278022462
98	0.000000006223576381848500000000	0.287217728
99	0.000000001996636376983260000000	0.296412993
100	0.000000000611503380229062000000	0.305608259
101	0.000000000178561141988840000000	0.314803525
102	0.000000000049643559148188400000	0.32399879
103	0.000000000013121184608779500000	0.333194056
104	0.000000000003291574287578040000	0.342389322
105	0.000000000000782299695955089000	0.351584588
106	0.000000000000175801553913088000	0.360779853
107	0.000000000000037273918049569800	0.369975119
108	0.000000000000007438254095801530	0.379170385
109	0.000000000000001393327265691320	0.38836565
110	0.000000000000000244256140540752	0.397560916
111	0.000000000000000039937291944118	0.406756182
112	0.000000000000000006067195203375	0.415951447
113	0.000000000000000000852655658922	0.425146713
114	0.000000000000000000110293088495	0.434341979
115	0.000000000000000000013054727849	0.443537245
116	0.000000000000000000001404231261	0.45273251
117	0.000000000000000000000136140987	0.461927776
118	0.000000000000000000000011778379	0.471123042

119	0.000000000000000000000000898183	0.480318307
120	0.000000000000000000000000059432	0.489513573
121	0.000000000000000000000000003343	0.498708839
122	0.000000000000000000000000000155	0.507904105
123	0.000000000000000000000000000006	0.51709937
124	0.000000000000000000000000000000	0.526294636
125	0.000000000000000000000000000000	0.535489902
126	0.000000000000000000000000000000	0.544685167
合計	1.000000000000000000000000000000	