

数理ファイナンス

平成 20 年 1 月 7 日 提出課題

1F040402-8 河野愛一郎

☆今日のヨーロピアン[4]について

<条件>

$S(0)=100, B(0)=100, u=1.1, r=1.0, d=0.9$

- 今日のヨーロピアン[4]について,
 - $T=100$ として現在価値を計算し, 満期 T での価値のグラフとともに提出すること。
- 行使価格 $K_c=105$ のヨーロピアン・コール・オプションと, 行使価格 $K_p=95$ のヨーロピアン・プット・オプションを, それぞれ一単位ずつ買うというポートフォリオ(ポジション)を考える
- 満期 $T=100$ における, ポジション価値を, (満期 T における)株価の関数として, グラフに描け
- 現在時点での価格を求めよ
 - $C_0(K_c=105) + P_0(K_p=95)$ になる

- リスク中立確率

$$110p + 90(1-p) = 100$$

これを解いて、 $p = \frac{1}{2}$ $\therefore 1-p = \frac{1}{2}$ から、 $P(u) = \frac{1}{2}, P(d) = \frac{1}{2}$

●状態証券価格

$$\psi(m) = {}_T C_m P(u)^m P(d)^{T-m} \quad (0 \leq m \leq 100 | \forall m \in Z)$$

$T=100$ より、

$$\begin{aligned} \psi(m) &= {}_{100} C_m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{100-m} \\ &= \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \quad (0 \leq m \leq 100 | \forall m \in Z) \end{aligned}$$

●満期における株価

$$S(m) = S_0 u^m d^{T-m} \quad (0 \leq m \leq 100 | \forall m \in Z)$$

$S(0)=100, u=1.1, d=0.9$ より、

$$S(m) = 100(1.1)^m (0.9)^{T-m} \quad (0 \leq m \leq 100 | \forall m \in Z)$$

●オプションのそれぞれの現在価格

<行使価格： $K_c=105$ のヨーロピアン・コール・オプション 100期>

$$C(m) = \max\{S(m) - K_c, 0\}$$

$$K_c=105, S(m) = 100(1.1)^m (0.9)^{T-m}, \psi(m) = \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \text{より、}$$

$$\begin{aligned} C(0) &= \sum_{m=0}^{100} \{\psi(m)C(m)\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \max\{S(m) - K_c, 0\} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \max\{100(1.1)^m (0.9)^{T-m} - 105, 0\} \right\} \end{aligned}$$

小数点第5位を四捨五入すると、 $C(0)=36.9039$

<行使価格：Kp=95のヨーロッパン・プット・オプション 100期>

$$P(m) = \max\{K_p - S(m), 0\}$$

$$K_p=95, S(m) = 100(1.1)^m(0.9)^{T-m}, \psi(m) = \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= \sum_{m=0}^{100} \{\psi(m)P(m)\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \max\{K_p - S(m), 0\} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \max\{95 - 100(1.1)^m(0.9)^{T-m}, 0\} \right\} \end{aligned}$$

小数点第5位を四捨五入すると、 $P(0)=34.9904$

●ポートフォリオの現在の価値

$$C(0)+P(0)=36.90393+34.9904 \doteq \underline{\underline{71.8944}}$$

●満期でのポジション価値のグラフ

$$C(m) = \max\{S(m) - K_c, 0\} \text{ かつ } P(m) = \max\{K_p - S(m), 0\} \text{ から、}$$

$$C(m) + P(m) = \max\{S(m) - K_c, 0\} + \max\{K_p - S(m), 0\}$$

$K_c=105, K_p=95$ より、

$$C(m) + P(m) = \max\{S(m) - 105, 0\} + \max\{95 - S(m), 0\}$$

今回は、株価 S だけを独立変数としてグラフを書くから、上を S の関数にすると、

$$C + P = \max\{S - 105, 0\} + \max\{95 - S, 0\}$$

<Case 1: $0 \leq S \leq 95$ のとき>

$S - 105 < 0, 95 - S \geq 0$ から、

$$C + P = 0 + 95 - S = -S + 95$$

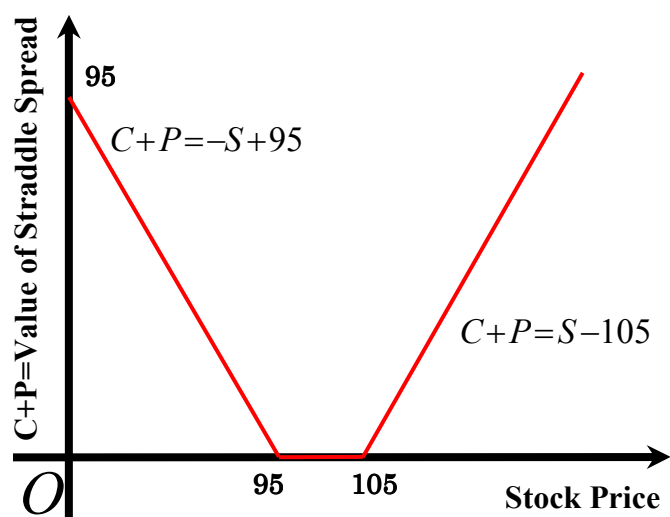
<Case 2: $95 \leq S \leq 105$ のとき>

$$S - 105 \leq 0, 95 - S \leq 0 \text{ から、}$$
$$C + P = 0 + 0 = 0$$

<Case 3: $S \geq 105$ のとき>

$$S - 105 \geq 0, 95 - S < 0 \text{ から、}$$
$$C + P = S - 105 + 0 = S - 105$$

これらCase 1~3を描けば以下のようなになる。



(つぎのページへ続く)

☆今日のヨーロピアン[5]について

●ヨーロピアン[5]

▶ 行使価格 $K_c=110$ のヨーロピアン・コール・オプションを1単位ショートし, 行使価格 $K_p=90$ のヨーロピアン・プット・オプションを1単位ショートしたポジションについて, $T=100$ として現在価値を計算し, 満期 T での価値のグラフとあわせて提出せよ。

ショートだから、今までの話をすべてマイナスにすればよい。

●オプションのそれぞれの現在価格

<行使価格： $K_c=110$ のヨーロピアン・コール・オプション 100期>

$$C(m) = -\max\{S(m) - K_c, 0\}$$

$$K_c=110, S(m) = 100(1.1)^m (0.9)^{T-m}, \psi(m) = \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} C(0) &= \sum_{m=0}^{100} \{\psi(m)C(m)\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} (-\max\{S(m) - K_c, 0\}) \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} (-\max\{100(1.1)^m (0.9)^{T-m} - 110, 0\}) \right\} \end{aligned}$$

小数点第5位を四捨五入すると、 $C(0) = -35.3607$

<行使価格： $K_p=90$ のヨーロッパ・プット・オプション 100期>

$$P(m) = -\max\{K_p - S(m), 0\}$$

$$K_p=90, S(m) = 100(1.1)^m(0.9)^{T-m}, \psi(m) = \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= \sum_{m=0}^{100} \{\psi(m)P(m)\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \left(-\max\{K_p - S(m), 0\}\right) \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{100} \left\{ \frac{100!}{m!(100-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \left(-\max\{90 - 100(1.1)^m(0.9)^{T-m}, 0\}\right) \right\} \end{aligned}$$

小数点第5位を四捨五入すると、 $P(0) = -31.5614$

●ポートフォリオの現在の価値

$$C(0) + P(0) = -35.36068 - 31.56143 \doteq \underline{\underline{-66.9221}}$$

●満期でのポジション価値のグラフ

$$\begin{aligned} C(m) &= -\max\{S(m) - K_c, 0\} \text{ かつ } P(m) = -\max\{K_p - S(m), 0\} \text{ から、} \\ C(m) + P(m) &= -\max\{S(m) - K_c, 0\} - \max\{K_p - S(m), 0\} \end{aligned}$$

$K_c=110, K_p=90$ より、

$$C(m) + P(m) = -\max\{S(m) - 110, 0\} - \max\{90 - S(m), 0\}$$

今回は、株価 S だけを独立変数としてグラフを書くから、上を S の関数にすると、
 $C + P = -\max\{S - 110, 0\} - \max\{90 - S, 0\}$

<Case 1: $0 \leq S \leq 90$ のとき>

$$\begin{aligned} S - 110 < 0, 90 - S \geq 0 \text{ から、} \\ C + P &= -0 - (90 - S) = S - 90 \end{aligned}$$

<Case 2: $90 \leq S \leq 110$ のとき>

$S - 110 \leq 0, 90 - S \leq 0$ から、

$$C + P = -0 - 0 = 0$$

<Case 3: $S \geq 110$ のとき>

$S - 110 \geq 0, 90 - S < 0$ から、

$$C + P = -(S - 110) - 0 = -S + 110$$

これらCase 1~3を描けば以下のようなになる。

