４期生数学サブゼミテスト⑳

About 80 minutes
(200 points)

NOTICE

１　All the numbers in this test are real number, if there is no notice.
２　Hurry up as fast as possible.
３　If you have any questions, raise your hand quietly and let officer know.
４　You can use pencil and ruler.
５　You must answer on “answer sheet” differentiated from “question sheet”. If you answer on “question sheet”, you will get no score with the answers.
６　Write your name at the top space on the answer sheet.
７　You can also get some scores from the process of answering.
In other word, you must write the process.

Answer in Japanese or English. Good Luck!

大問１

P を価格、Q を消費量とする。需要関数 $Q = -P + a$ $(a > 0)$ について考える。

（１）QP 平面とは何か答えなさい。
（２）P と Q には制約条件が存在するはずである。それを不等式で書け。
（３）需要関数を QP 平面に描け。
（４）需要関数における内生変数と外生変数について述べよ。
（５）需要関数における独立変数と従属変数について述べよ。
（６）実際の価格が P^*、消費量が Q^*のとき、消費者余剰を積分記号を用いて表わした上で、P^*、Q^*、a を使って表しなさい（図を使って考えると良い）。

大問２

P を価格、Q を消費量かつ生産量とする。ある市場の需要関数を $Q=-P+12$ とし、この市場に存在する企業の費用関数を $TC=3Q$（TC は総費用）とする。TR を企業の総収入とすれば、企業の利潤である π は、$\pi=TR-TC$ として求められる。ちなみに、企業の総収入は価格と生産量をかけたものだから、$TR=PQ$ である。以下、この市場の企業は１社のみとする。この企業は民間企業であり、自社の利潤を最大にすることを目的に生産量を変化させるとする。

（１）P と Q には制約条件が存在するはずである。それを不等式で書け。

（２）需要関数 $Q=-P+12$ を変形して、$TR=PQ$ に代入し、TR を Q のみの１変数関数で表しなさい。

（３）利潤である $\pi=TR-TC$ に、（１）の結果や費用関数 $TC=3Q$ を代入して、利潤を Q のみの１変数関数で表しなさい。

（４）（３）で求められた利潤の関数を、$Q\pi$ 平面に図示しなさい。その際、（１）で考えた制約条件に注意すること。

（５）（３）で求められた利潤の関数について、増減表を作成しなさい。
その際、$\dfrac{d\pi}{dQ},\dfrac{d^2\pi}{dQ^2}$ の正負と Q の区間との関係を必ず調べること。

（６）民間企業が利潤を最大化するときの生産量と、そのときの利潤を求めなさい。

（７）需要関数を QP 平面に描き、消費量が Q のときの消費者余剰（これを CS する）を、Q を独立変数とする関数で表しなさい。（CS を Q を使って表すこと。）

（８）（７）に（３）で求められた利潤を合計し、消費者余剰と企業の利潤（生産者余剰）の合計（$\pi+CS$）である総余剰（これを S とする）を、Q を独立変数とする関数で表しなさい。（S を Q を使って表すこと。）

（９）（８）の結果で求められた総余剰を最大化させるような生産量と、そのときの消費者余剰、企業の利潤、総余剰を求めて、（６）の結果と比べなさい。

大問３

古典派のミクロ経済学では、消費者の効用（幸せと考えればよい）は、彼らが財の消費量で定まると考えられている。ここで消費者の効用を U とする。また、この世の中に X と Y の２つの財しか存在しないとする。X と Y、それぞれの消費量を x、y とする。効用と消費量の関係（効用関数）を、$U=f(x,y)$ とする。効用関数において、$\dfrac{\partial U}{\partial x},\dfrac{\partial U}{\partial y}$ をそれぞれ、MU_x, MU_y と呼び、$\dfrac{MU_x}{MU_y}$ を MRS と呼ぶ。また、効用関数上において、効用水準が変化しない財の組み合わせを無差別曲線と呼ぶ。

（１）x と y には制約条件が存在するはずである。それを不等式で書け。

（２）MU_x, MU_y の正負を考えよ。

（３）$U=f(x,y)$ に対して、全微分を適用せよ。

（４）無差別曲線上では効用水準が変化しない。これを表すとあるものが０と等しくなるが、それは何か答えなさい。

（５）（４）の結果を（３）に代入し、それを変形して、MRS を他のもので表しなさい。

以下、効用関数を $U=\sqrt{xy}$ とする。

（６）y を定数とみなして、$U=\sqrt{xy}$ を xU 平面に描きなさい。また、この描かれた図形はどのような特徴があるか述べなさい。

（７）U を定数とみなして、$U=\sqrt{xy}$ を xy 平面に描きなさい。

（８）$U=\sqrt{xy}$ において、MU_x, MU_y を x、y で表し、その正負を判定しなさい。

（９）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ を x、y で表し、その正負を判定しなさい。

また、この結果は何を意味しているのか述べなさい。

(10) この効用関数とは別に、x と y の組み合わせが、$2x+3y=12$ で表された。これを変形して、$U=\sqrt{xy}$ に代入し、U を x による 1 変数関数に直しなさい。

(11) (10) の結果、求められた関数を xU 平面に描きなさい。

(12) (10) の関数の増減表を作成し、U を最大化させる x とそのときの U を求めよ。その際、$\dfrac{dU}{dx},\dfrac{d^2U}{dx^2}$ の正負と Q の区間との関係を必ず調べること。

大問４

ある不動産が存在する。この不動産を誰かに貸して得ることができる収入は毎年 A 円であり、貸し始めて 1 年後から永久にもらうことができる。だが、将来の収入の価値は、その時点と現在では異なる。例えば、現在、利子率が 5％であり、100 円持っていたとしよう。この 100 円を誰かに貸せば、1 年後には何もしなくても 100×(1+0.05)＝105 円となる。よって、今回のケースでは、1 年後 105 円と現在の 100 円が同じ価値があるといえ、この 105 円の現在の価値を求めるには、$\frac{105}{1+0.05}=100$ 円と計算しなければならない。よって、将来の価値は、利子率で割り引かなければならず、例えば、利子率が r で一定のとき、n 年後の A 円は、現在価値では、$\frac{A}{(1+r)^n}$ となる。この将来の A 円は毎年もらえるので、将来においてもらえるお金の合計は、$\frac{A}{(1+r)^1}+\frac{A}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}+\cdots$ となる。これがこの不動産の現在価値となる。

（1）$\left\{\frac{A}{(1+r)^1},\frac{A}{(1+r)^2},\cdots,\frac{A}{(1+r)^n},\cdots\right\}$ は等比数列だが、

　　この数列の公比及び初項を求め、第 n 項を表しなさい。

（2）（1）の結果を利用して、第 n 項までの合計を表しなさい。

（3）（2）の結果に対し極限を使って、この不動産の現在価値を表しなさい。