市田ゼミ／2007 年 7 月 12 日（土）

Price-consumption curve から Demand curve と Consumer surplus の導出例

河野　愛一朗

例１（Ex.5.8）

　次の Assumption のときの Demand curve と x財価格が 0.5 から 0.2 へ下落したときの Consumer surplus の変化を答えよ

＜Assumption＞

・$U=2\sqrt{x}+y$（Quasi-linear indifference curve）[1]…①

・$P_x x+y=10$（Budget line, $P_y=1$, $I=10$）…②

＜Answer＞

② ⇔ $y=-P_x x+10$　これを①に代入すると,

① ⇔ $U=2\sqrt{x}-P_x x+10=2x^{\frac{1}{2}}-P_x x+10$　…①´

・Consumer は Utility maximization するように行動する.

①´より, $\frac{d^2U}{dx^2}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-P_x$　$x^{-\frac{3}{2}}>0$, $P_x>0$　よって $\frac{d^2U}{dx^2}<0$

∴ $\frac{dU}{dx}=0$ のとき, Utility maximization

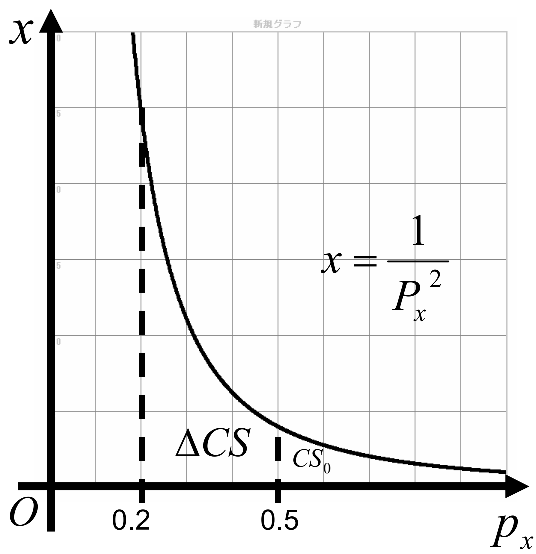
$$\frac{dU}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}-P_x=0 \quad x^{-\frac{1}{2}}=P_x \quad \frac{1}{\sqrt{x}}=P_x \quad \sqrt{x}=\frac{1}{P_x}$$

よって　$x=\frac{1}{P_x{}^2}$

[1] 例えば、x・yの２財消費者モデルにおいて、xの需要量を一定に保ったときに、どのようなyの需要量の水準においても、ＭＲＳが一定であるような indifference curve のこと。

次に，Consumer surplus の変化を求める.

$x=\dfrac{1}{P_x^{\ 2}}$ を xP_x 平面で描くと，
右図のようになる.



ここで，新たな Consumer surplus の増加量は，ΔCS .

$$\Delta CS=\int_{0.2}^{0.5}\frac{1}{P_x^{\ 2}}dP_x=\int_{0.2}^{0.5}P_x^{\ -2}dP_x$$ [2]

$$=\left[-P_x^{\ -1}\right]_{0.2}^{0.5}=\left[-\frac{1}{P_x}\right]_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=-2+5=3$$

∴ $\underline{\Delta CS=3}$ Consumer surplus の増加量は 3 となる.

＜Appendix＞ CS_0 の求め方

$x=\dfrac{1}{P_x^{\ 2}}$ は x 軸と交わらない. CS_0 の求め方には 2 通りある.

（1） $P_x x$ 平面で描き直し（テキストでは元々こちら），$P_x=x^{-\frac{1}{2}}$ と $P_x=0.5$ で挟まれた領域のうち，$[0,4]$ [3] の定積分を求める.

つまり，$CS_0=\displaystyle\int_0^4(x^{-\frac{1}{2}}-0.5)dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x\right]_0^4=2$ ∴ $\underline{CS_0=2}$

---

2 不定積分を行っている。積分は微分の逆と考えれば良い。$\dfrac{d}{dP_x}(-P_x^{\ -1})=P_x^{\ -2}$

3 $0\le x\le 4$ のこと。$x=\dfrac{1}{P_x^{\ 2}}$ より、$(P_x,x)=(0.2,25),(0.5,4)$ 。

（2） xP_x 平面のまま，$x=\frac{1}{{P_x}^2}$ を使う．$x=\frac{1}{{P_x}^2}$ は x 軸と交わらないが，$x=\infty$ と考えることは可能である．すると，

$$CS_0=\lim_{t\to\infty}\int_{0.5}^{t}\frac{1}{{P_x}^2}dP_x=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{P_x}\right]_{\frac{1}{2}}^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+2\right)=2$$ より，$\underline{CS_0=2}$

$\boxed{例2}$ (Ex. 5. 9)

次の Assumption のときの Demand curve と x 財価格が 9 から 4 へ下落したときの Consumer surplus の変化を答えよ

<Assumption>

・$U=xy$ (Utility function) …①

・$P_x x+y=72$ (Budget line, $P_y=1$, $I=72$) …②

<Answer>

② ⇔ $y=-P_x x+72$ これを①に代入すると，

① ⇔ $U=x(-P_x x+72)=-P_x x^2+72x$ …①´

・Consumer は Utility maximization するように行動する．

①´より，$\frac{d^2U}{dx^2}=-2P_x$ 　$P_x>0$ 　よって $\frac{d^2U}{dx^2}<0$

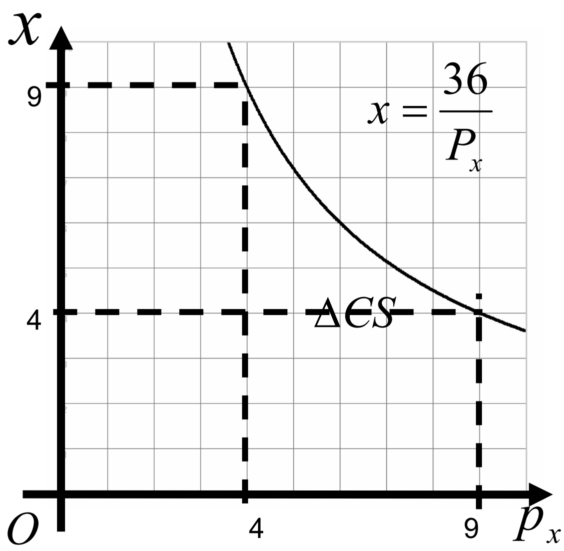
∴ $\frac{dU}{dx}=0$ のとき，Utility maximization

$$\frac{dU}{dx}=-2P_x x+72=0$$

よって $\underline{x=\frac{36}{P_x}}$

次に，Consumer surplus の変化を求める．

$x=\dfrac{36}{P_x}$ を xP_x 平面で描くと，
右図のようになる.



ここで，新たな Consumer surplus の増加量は，ΔCS.

$$\Delta CS=\int_4^9 \frac{36}{P_x}dP_x=36\int_4^9 \frac{1}{P_x}dP_x$$ [4]

$$=36[\ln x]_4^9=36(\ln 9-\ln 4)$$ [5]

$$=29.19349\cdots$$

∴　$\underline{\Delta CS \cong 29.2}$　Consumer surplus の増加量は 29.2 となる.

---

4 例えば $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx$ を $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}$ と表すことができる。

5 底を e とする対数（例：$\log_e x$）を自然対数（natural log）といい，
$\log_e$ の部分を単に $\log$ や $\ln$ と表す。（つまり，$\log_e x=\log x=\ln x$）
そこで、$\dfrac{d}{dx}\log_a x=\dfrac{1}{x\ln a}$ なのだが、$x=e$ を代入すると，$\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$