生産量の変化がＧＤＰデフレーターに与える影響について

早稲田大学商学部
商業・貿易・金融コース４年
河 野 愛 一 朗

平成１９年４月２９日

目次

0 本論文の目的 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
1 ＧＤＰデフレーターの定義
1.1 名目ＧＤＰ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・3
1.2 実質ＧＤＰ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・4
1.3 ＧＤＰデフレーター・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・4
2 仮定・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・4
3 解析
3.1 条件・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・5
3.2 分析・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・5
3.3 結果・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・8
4 考察
4.1 仮定の再確認・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・8
4.2 解析結果の確認・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・9
4.3 考察・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・9
5 付録・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・9
6 参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・10

0 本論文の目的

とある授業でＧＤＰデフレーターに関する以下のような問題があった。

****

Below are some date from the land of milk and honey.

Year	Price of Milk	Quantity of Milk	Price of Honey	Quantity of Honey
2001	1	100	2	50
2002	1	200	2	100
2003	2	200	4	100

Compute nominal GDP, real GDP, and GDP deflator for each year, using 2001 as the base year.

****

（出所）N. Gregory Mankiw, “Principles of Economics third edition”

この問題自体は，マクロ経済学の初歩中の初歩の簡単な問題なのだが，解いてみると以下のようになった。

Year	Nominal GDP	Real GDP	GDP deflator
2001	1×100＋2×50＝200	1×100＋2×50＝200	(200/200)×100＝100
2002	1×<u>200</u>＋2×<u>100</u>＝<u>400</u>	1×<u>200</u>＋2×<u>100</u>＝400	(<u>400</u>/<u>400</u>)×100＝100
2003	<u>2</u>×200＋<u>4</u>×100＝<u>800</u>	1×200＋2×100＝400	(<u>800</u>/400)×100＝<u>200</u>

（前年から変化した数値に下線を引いている。）

ＧＤＰデフレーターは，名目ＧＤＰを実質ＧＤＰで割ったものを１００倍したものである。基準年（この問題では 2001 年）に対し，物価がどれくらいになったかを示す値の一つであるが，ＧＤＰの計算に財の価格だけではなく，生産量も含める以上，生産量の変化はＧＤＰデフレーターに影響を与えるはずである。しかし，この問題では，基準年に対し，ＧＤＰデフレーターが 100→200 と２倍になっているが，価格も milk:1→2，Honey:2→4 と同じく２倍上昇しているので，生産量の変化 milk:100→200，Honey:50→100 が本当にＧＤＰデフレーターの値に影響を与えているか不明瞭である。

そこで，2003 年における Honey の生産量を 100 から 200 に変えてみた。Milk の生産

量は不変であるので，2003 年のＧＤＰデフレーターの値は変化し，生産量の変化はＧＤＰデフレーターに影響を与えることが示されるのではないかと考えた。

Year	Nominal GDP	Real GDP	GDP deflator
2001	1×100＋2×50＝200	1×100＋2×50＝200	(200/200)×100＝100
2002	1×200＋2×100＝400	1×200＋2×100＝400	(400/400)×100＝100
2003	2×200＋4×200＝1200	1×200＋2×200＝600	(800/400)×100＝200

ところが，再計算の結果，不思議なことに，2003 年のＧＤＰデフレーターは 200 で変化しない。ここで仮に，Milk と Honey の基準年の価格，2003 年の価格，数量をそれぞれ $P_{ik}, P_{i,} Q_i \ (i=m,h)$ とすれば，

$$(\text{ＧＤＰデフレーター}) = 100\frac{P_m Q_m + P_h Q_h}{P_{mk} Q_m + P_{hk} Q_h}$$

と表せられるので，Honey の価格（P_h）の変化は，ＧＤＰデフレーターに影響を与えるはずであった。

そこで，この違和感を持たざるを得ない結果に対し，「どのような場合に，前年に対する生産量の変化が，ＧＤＰデフレーターに影響を与えない」のかを分析する。

1 ＧＤＰデフレーターの定義

分析の前に，今回，使用する概念を確認する。

1.0 ＧＤＰ

一定期間において，一国内で生産される全ての最終的な財・サービスの市場価値。

1.1 名目ＧＤＰ

1.0において定義において，ある年のＧＤＰを，その年の財・サービスの価格を用いて計ったもの。

1.2 実質ＧＤＰ

1.0において定義において，ある年のＧＤＰを，基準年[1]の財・サービスの価格を用いて計ったもの。

1.3 ＧＤＰデフレーター

1.1の名目ＧＤＰを，1.2の実質ＧＤＰで割り，１００倍したもの。

2 仮定

2.1 仮定

・x個の財・サービスが最終的に国内で生産される経済を想定（2.1.1）

・n期と$n+1$期のＧＤＰデフレーターが一致（2.1.2）

純粋に，生産量がＧＤＰデフレーターに与える影響を考察しているので，

・それぞれの財において，n期と$n+1$期の価格が一致（2.1.3）

2.2 使用する文字について

・n期における個々の最終財（i財）の価格を$P_{i(n)}$ $(i=1,2,3,\cdots,x)$とする。(2.2.1)

・n期における個々の最終財（i財）の生産量を$Q_{i(n)}$ $(i=1,2,3,\cdots,x)$とする。(2.2.2)

・基準年を$n=k$期とする。すなわち，基準年の価格は，$P_{i(k)}$となる。(2.2.3)

・n期におけるＧＤＰデフレーター，実質ＧＤＰ，名目ＧＤＰをそれぞれ，

$D_{(n)}, RY_{(n)}, NY_{(n)}$とする。(2.2.4)

[1] 前段0では，2001年のこと。

3 解析

3.1 仮定の式化

・(2.1.2)，(2.2.4) より，$D_{(n)} = D_{(n+1)}$ (3.1.1)

・(2.1.3)，(2.2.1) より，$P_{i(n+1)} = P_{i(n)}\ (i = 1,2,3,\cdots,x)$ (3.1.2)

・1.3 より，$D_{(n)}, RY_{(n)}, NY_{(n)}$ の互いの関係は，$D_{(n)} = 100\dfrac{NY_{(n)}}{RY_{(n)}}$ (3.1.3)

・1.0，1.1，(2.2.1)，(2.2.2) より，
ＧＤＰとは，あらゆる最終財の（価格）×（生産量）の総和なので，[2]

$NY_{(n)} = P_{1(n)}Q_{1(n)} + P_{2(n)}Q_{2(n)} + \cdots + P_{x(n)}Q_{x(n)} = \sum_{i=1}^{x} P_{i(n)}Q_{i(n)}$ と表せる。(3.1.4)

・1.0，1.2，(2.2.2)，(2.2.3) より，同様に，

$RY_{(n)} = P_{1(k)}Q_{1(n)} + P_{2(k)}Q_{2(n)} + \cdots + P_{x(k)}Q_{x(n)} = \sum_{i=1}^{x} P_{i(k)}Q_{i(n)}$ と表せる。(3.1.5)

・n 期と $n+1$ 期の生産量の関係を定数 α を用いて，

$Q_{i(n+1)} = \alpha_i Q_{i(n)}\ (\alpha > 0, i = 1,2,3,\cdots,x)$ と表せる。(3.1.6)

3.2 分析

(3.1.1) に (3.1.3) を代入し，

$$D_{(n)} = D_{(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad 100\frac{\sum_{i=1}^{x} P_{i(n+1)}Q_{i(n+1)}}{\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)}Q_{i(n+1)}} = 100\frac{\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)}Q_{i(n)}}{\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)}Q_{i(n)}}$$

[2] (3.1.4)・(3.1.5) について
一般に，ＧＤＰは，$Y = C + I + G + \cdots$ などと表され，消費・投資・政府支出などから構成されるが，生産・分配・支出は一致するという「三面等価の原則」から，生産面に着目したこのような表示は可能である。また，本分析では，いずれの期におけるバスケット（財の数）は同じとしている。

両辺を 100 で割り，さらに，(3. 1. 6) を代入すると， $\dfrac{\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} Q_{i(n)}}{\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} Q_{i(n)}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} \alpha_i Q_{i(n)}}{\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} \alpha_i Q_{i(n)}}$

よって，分母を消去して，

$$\underline{\left\{\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} Q_{i(n)}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} \alpha_i Q_{i(n)}\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} Q_{i(n)}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} \alpha_i Q_{i(n)}\right\}} \qquad (3.2.1)$$

さて，このままでは式を単純化できないので，表現を改める。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} Q_{i(n)} &= P_{1(n)} Q_{1(n)} + P_{2(n)} Q_{2(n)} + \cdots + P_{x(n)} Q_{x(n)} \\ &= \begin{pmatrix} P_{1(n)} & P_{2(n)} & \cdots & P_{x(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1(n)} \\ Q_{2(n)} \\ \vdots \\ Q_{x(n)} \end{pmatrix} \qquad (3.2.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} Q_{i(n)} &= P_{1(k)} Q_{1(n)} + P_{2(k)} Q_{2(n)} + \cdots + P_{x(k)} Q_{x(n)} \\ &= \begin{pmatrix} P_{1(k)} & P_{2(k)} & \cdots & P_{x(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1(n)} \\ Q_{2(n)} \\ \vdots \\ Q_{x(n)} \end{pmatrix} \qquad (3.2.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} \alpha_i Q_{i(n)} &= P_{1(k)} \alpha_1 Q_{1(n)} + P_{2(k)} \alpha_2 Q_{2(n)} + \cdots + P_{x(k)} \alpha_x Q_{x(n)} \\ &= \begin{pmatrix} P_{1(k)} & P_{2(k)} & \cdots & P_{x(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1(n)} \\ Q_{2(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_{x(n)} \end{pmatrix} \qquad (3.2.4)\end{aligned}$$ [3]

[3] $$\begin{pmatrix} P_{1(k)} & P_{2(k)} & \cdots & P_{x(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 P_{1(k)} & \alpha_2 P_{2(k)} & \cdots & \alpha_x P_{x(k)} \end{pmatrix}$$ （1 × x の行列）

$$\sum_{i=1}^{x} P_{i(n)}\alpha_i Q_{i(n)} = P_{1(n)}\alpha_1 Q_{1(n)} + P_{2(n)}\alpha_2 Q_{2(n)} + \cdots + P_{x(n)}\alpha_x Q_{x(n)}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{1(n)} & P_{2(n)} & \cdots & P_{x(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{1(n)} \\ Q_{2(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_{x(n)} \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

ここで，各行列に名前をつける。

$P_{(n)} = \begin{pmatrix} P_{1(n)} & P_{2(n)} & \cdots & P_{x(n)} \end{pmatrix}$, $P_{(k)} = \begin{pmatrix} P_{1(k)} & P_{2(k)} & \cdots & P_{x(k)} \end{pmatrix}$

（ともに $1 \times x$ の行列）[4]

$Q_{(n)} = \begin{pmatrix} Q_{1(n)} \\ Q_{2(n)} \\ \vdots \\ Q_{x(n)} \end{pmatrix}$ （$x \times 1$ の行列）

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_x \end{pmatrix}$ （$x \times x$ の対角行列[5]）

これらの行列を（3.2.2），（3.2.3），（3.2.4），（3.2.5）に代入して，

（3.2.2） $\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} Q_{i(n)} = P_{(n)} Q_{(n)}$

（3.2.3） $\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} Q_{i(n)} = P_{(k)} Q_{(n)}$

（3.2.4） $\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{x} P_{i(k)} \alpha_i Q_{i(n)} = P_{(k)} A Q_{(n)}$

（3.2.5） $\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{x} P_{i(n)} \alpha_i Q_{i(n)} = P_{(n)} A Q_{(n)}$

これら全て，（3.2.1）に代入すると，

$\{P_{(n)}Q_{(n)}\}\{P_{(k)}AQ_{(n)}\} = \{P_{(k)}Q_{(n)}\}\{P_{(n)}AQ_{(n)}\}$ となる。

---

[4] 例えば，2×3 の行列とは，縦に 2 個（2 行），横に 3 個（3 列）並ぶ行列のことである。

[5] 対角行列とは，対角成分（行列における行と列の数が同じ成分）以外の成分が全て 0 である行列のこと。

行列演算の結合法則[6]を適用して，

$$\{P_{(n)}Q_{(n)}\}\{P_{(k)}\}AQ_{(n)} = \{P_{(k)}Q_{(n)}\}\{P_{(n)}\}AQ_{(n)}$$

$AQ_{(n)} \neq O$ より，両辺は同値関係にあるので，

$$\{P_{(n)}Q_{(n)}\}\{P_{(k)}\} = \{P_{(k)}Q_{(n)}\}\{P_{(n)}\}$$

（3.1.4），（3.1.5）より，

$P_{(n)}Q_{(n)} = \sum_{i=1}^{x} P_{i(n)}Q_{i(n)} = NY_{(n)},\ P_{(k)}Q_{(n)} = \sum_{i=1}^{x} P_{i(k)}Q_{i(n)} = RY_{(n)}$ から，

$$NY_{(n)}P_{(k)} = RY_{(n)}P_{(n)}$$

3.3 結果

$RY_{(n)}, NY_{(n)}$ はともにスカラーなので，$P_{(n)} = \dfrac{NY_{(n)}}{RY_{(n)}}P_{(k)}$ と変形できる。

すなわち，$\underline{(P_{1(n)} \quad P_{2(n)} \quad \cdots \quad P_{x(n)}) = \dfrac{NY_{(n)}}{RY_{(n)}}(P_{1(k)} \quad P_{2(k)} \quad \cdots \quad P_{x(k)})}$

また，（3.1.3）の $D_{(n)} = 100\dfrac{NY_{(n)}}{RY_{(n)}}$ より，ＧＤＰデフレーターで用いると，

$$\underline{(P_{1(n)} \quad P_{2(n)} \quad \cdots \quad P_{x(n)}) = \frac{D_{(n)}}{100}(P_{1(k)} \quad P_{2(k)} \quad \cdots \quad P_{x(k)})}$$

4 考察

4.1 仮定の再確認

・x 個の財・サービスが最終的に国内で生産される経済を想定（2.1.1）
・n 期と $n+1$ 期のＧＤＰデフレーターが一致（2.1.2）
・それぞれの財において，n 期と $n+1$ 期の価格が一致（2.1.3）

[6] 結合法則とは，例えば，$(AB)C = A(BC)$ など。

4.2 解析結果の確認

3.3 より，$(P_{1(n)} \quad P_{2(n)} \quad \cdots \quad P_{x(n)}) = \dfrac{D_{(n)}}{100}(P_{1(k)} \quad P_{2(k)} \quad \cdots \quad P_{x(k)})$

・生産量に関するあらゆる値（$Q_{i(n)}$，α_i $(\alpha > 0, i = 1,2,3,\cdots,x)$）

が結果に反映されない。つまり，今回の場合には生産量は結果に影響を及ぼさない。

・現在の他の財に対する価格比率が，基準年のものと同じ。

整数a,bを用いて，$\underline{P_{a(n)} : P_{b(n)} = P_{a(k)} : P_{b(k)} \ (1 \le a \le x, 1 \le b \le x)}$

・基準年の価格に対する現在の価格の割合（基準年に対する物価上昇率）が，全ての財でも同じ値をとる。１分率のＧＤＰデフレーター$\dfrac{D_{(n)}}{100}$（または$\dfrac{NY_{(n)}}{RY_{(n)}}$）倍される。

例えば，$\underline{P_{a(n)} : P_{a(k)} = P_{b(n)} : P_{b(k)}}$ または $\underline{P_{i(n)} = \dfrac{D_{(n)}}{100} P_{i(k)} \ (i = 1,2,3,\cdots,x)}$

4.3 考察

今回は，物価が変動していないn期と$n+1$期のＧＤＰデフレーターが一致する場合を解析した。3.3 の解析結果では，n期と$n+1$期のＧＤＰデフレーターが一致する状態の解は，4.2 のような価格比率が特定の状態にあるときとなる。このような時では，各財の生産量がどのように変化しようとも，ＧＤＰデフレーターの値は変化しない。

5 付録

・本解析を数学的帰納法で行った場合。
・名目成長率，実質成長率，物価上昇率（ＧＤＰデフレーター上昇率）の関係
（編集中）

6 参考文献

本論文を書くに当たって参考にした本，及びホームページについて，以下に挙げておく。

(1) N. Gregory Mankiw, “Principles of Economics third edition”
(2) 片岡孝夫他,「入門マクロ経済学」，中央経済社，2003
(3) 安原晃他,「社会科学の数学」，朝倉書店，2003
(4) http://next1.cc.it-hiroshima.ac.jp/，数学教育学習支援研究室