元利均等払いの２つの計算方法

～連立方程式と漸化式～

早稲田大学　商学部
商業・貿易・金融コース４年
河野　愛一朗

平成 19 年 10 月 19 日

目次

0 本論文の目的 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2

1 連立方程式モデル
1.1 問の解釈・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2
1.2 連立方程式の解の計算・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・3
1.3 解の解釈・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・4

2 漸化式モデル
2.1 連立方程式モデルの問題点・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・5
2.2 漸化式の組み立て・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・5
2.3 漸化式の計算と各期の返済額・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・6
2.4 漸化式の結果の確認・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・8

0　本論文の目的

数理ファイナンスにおける元利均等払いについて，以下の問を考える．

課題：以下の条件のときの各期の支払額を求めよ．

元本１０００００００円，利子率５％，満期３年，利払い年１回期末，複利計算年１回

この問に対する、２つの解法について考察する。その際、各期の支払額（返済金額）は x で一定であるとする．

1　連立方程式モデル

1.1　問の解釈

利子は期初元本にかかる．返済金額は元本部分と利子部分の合計である．返済後の期末元本は，期初元本から返済金額の元本部分と除いたものであり，それが次期の期初元本となる．

この様子を３期間においてシミレーションしたものが以下の表である．ちなみに，返済金額の元本部分を $A_i\ (i=1,2,3)$ とする．

年	期初元本	返済金額			返済後の期末元本
		元本部分	＋	利子部分	
1	*1000000*	A_1	＋	*1000000*0.05*	$1000000\text{-}A_1$
2	$1000000\text{-}A_1$	A_2	＋	*(1000000-A1)*0.05*	$1000000\text{-}A_1\text{-}A_2$
3	$1000000\text{-}A_1\text{-}A_2$	A_3	＋	*(1000000-A1-A2)*0.05*	$1000000\text{-}A_1\text{-}A_2\text{-}A_3=0$

（Microsoft の Excel という表計算ソフトで作成）

・返済金額（＝元本部分＋利子部分）は，各期において，x で一定である．
・また，元本部分の支払額の合計は 1000000 となる．

上の二つの事実から，以下の４元１次方程式が成立する．

$$\begin{cases} x = 1000000 \times 0.05 + A_1 & \cdots(1) \\ x = (1000000 - A_1) \times 0.05 + A_2 & \cdots(2) \\ x = (1000000 - A_1 - A_2) \times 0.05 + A_3 & \cdots(3) \\ A_1 + A_2 + A_3 = 1000000 & \cdots(4) \end{cases}$$

これは，文字４つに対して，方程式も４つなので，各解を求めることができるはずである．実際にこれを解き，x を求めてみる．

1.2　連立方程式の解の計算

(1)を変形して，

$A_1=x-1000000\times0.05 \quad \cdots(1)'$

(2)にこれを代入すると，

$x=(1000000-(x-1000000\times0.05))\times0.05+A_2$

これを変形して，

$A_2=x-(1000000-(x-1000000\times0.05))\times0.05 \quad \cdots(2)'$

(4)を変形して，

$A_3=1000000-A_1-A_2$

(3)にこれを代入して，

$x=(1000000-A_1-A_2)\times0.05+(1000000-A_1-A_2)$

$\therefore \quad x=(1000000-A_1-A_2)\times1.05$

これに(1)′,(2)′を代入すると，

$\underline{x=(1000000-(x-1000000\times0.05)-(x-(100000-(x-1000000\times0.05))\times0.05))\times1.05}$

この１元１次方程式を Mathematica を使用して，計算する．

```
Solve[x==(1000000-(x-1000000*0.05)-(x-(100000-(x-1000000*0.05))*0.05))*1.05,x]/
/N
```

```
{{x→367208.5646…}}
```

この小数点以下を繰り上げて，

各期の支払額（返済金額）$\underline{\boldsymbol{x=367209}}$ が算出された．

1.3　解の解釈

この結果にしたがって，シミュレーションに実際の表を当てはめると，以下のようになる．

年	期初元本	返済金額			返済後の期末元本
		元本部分	＋	利子部分	
1	1,000,000.00	317,209.00	＋	50,000.00	682,791.00
2	682,791.00	333,069.45	＋	34,139.55	349,721.55
3	349,721.55	349,722.92	＋	17,486.08	-1.37

（Excel で計算．小数点第３位以下を切り捨てた．返済金額を毎期 367209 円としている．）

しかし，このシミュレーションは２つの問題を抱えている．まず，最終期の期末元本が負になっている．つまり，返済金額を毎期 367209 円にすることに固執することで，不要に返済し過ぎている．また，同じく最終期の期末元本が小数(0.37…)を含んでいる．今回の場合，貨幣の最小単位は 1 であり，小数の額を返済するということは不可能なので，単純に 1.37…を３等分した額で，求められた返済額から引くなどということはできない．

そこで，シミュレーションにおいて，小数を出さないために，返済金額の利子部分を切り上げ，返済金額を毎期 367209 円にすることで，元本部分を計算する．これによって，最終期の期末元本が小数であることは回避されたが，このままでは最終期の期末元本がいまだ負で-1 である．これを三等分してもまた小数が発生するだけなので，最終期の返済金額の元本部分を１減らす．つまり，

第１期及び第２期が，返済金額 367209 円
第３期のみ　返済金額 367208 円

これが本問の結論である．

以上のような返済額を用い，返済金額の利子部分を切り上げたシミュレーションは以下の表である．

年	期初元本	返済金額			返済後の期末元本
		元本部分	＋	利子部分	
1	1000000	317209	＋	50000	682791
2	682791	333069	＋	34140	349722
3	349722	349722	＋	17486	0

（確かに，317209+333069+349722=1000000 である．）

2　漸化式モデル

2.1　連立方程式モデルの問題点と漸化式モデルの目的

今回のような連立方程式を組み立てて解くという方法は，今回の場合，４つの連立式を解けばいいので，さほど大変ではない．しかし，返済回数が増えれば増えるほど，連立式の数は増加する．具体的にｎ回返済する場合（ｎ期の場合）には，返済金額＝元本部分＋利子部分の関係式はｎ通り成立し，元本部分の支払額の合計が返済金額の合計（元本）になることから１つの式，つまり，計ｎ＋１個の方程式を解くことになる．

そこで，先ほどの３期の場合から帰納的に考えることを利用し，一般化された解き方をすることが，本項の目的である．

2.2　漸化式の組み立て

（例）ｎ＝３期の場合

$$
\begin{cases}
x = 1000000 \times 0.05 + A_1 & \cdots(1) \\
x = (1000000 - A_1) \times 0.05 + A_2 & \cdots(2) \\
x = (1000000 - A_1 - A_2) \times 0.05 + A_3 & \cdots(3) \\
A_1 + A_2 + A_3 = 1000000 & \cdots(4)
\end{cases}
$$

・連立方程式(4)から，ｎ期（ｎは定数）の場合を考える．

S_i を $S_i = \sum_{k=0}^{i} A_k \quad (k = 0,1,2,\cdots,i)$ と定義する．但し，$A_0=0$ である．

元本（返済すべき金額の合計）を定数 B とするならば，

$S_n = B$

・連立方程式(1) (2) (3)から，ｎ期の場合を考える．
金利を定数 r とすれば，

$x = (B - S_{i-1})r + A_i \quad (n \geq i \geq 1)$

(1)式から考えると，i=1 のとき，S_0 が生じ不都合となりそうだが，$A_0=0$ と定義したので，この問題は回避される．

よってまとめると，

$$\begin{cases} x = r(B - S_{i-1}) + A_i \quad (n \geq i \geq 1) & \cdots(1) \\ S_n = B & \cdots(2) \\ A_0 = S_0 = 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

この漸化式を解き，x を求めればよい．

2.3　漸化式の計算と各期の返済額

(1)は $n \geq i \geq 1$ において成立するので，

$$x = r(B - S_{i-1}) + A_i = r(B - S_i) + A_{i+1} \quad (n - 1 \geq i \geq 1)$$

展開して整理すると，

$$rB - rS_{i-1} + A_i = rB - rS_i + A_{i+1}$$
$$-rS_{i-1} + A_i = -rS_i + A_{i+1}$$
$$r(S_i - S_{i-1}) + A_i = A_{i+1}$$

$S_i = \sum_{k=0}^{i} A_k$ より，$S_i - S_{i-1} = A_i$ から，

$$rA_i + A_i = A_{i+1}$$
$$(1+r)A_i = A_{i+1} \quad (n-1 \geq i \geq 1)$$

∴　A_i **は公比** $(1+r)$ **の等比数列といえる．よって，** $A_i = A_1(1+r)^{i-1} \quad (1 \leq i \leq n)$

…(4)

これを利用して，S_i を求めると，

$$S_i = \sum_{k=0}^{i} A_k = \sum_{k=0}^{i} A_1(1+r)^{k-1} = A_0 + \sum_{k=1}^{i} A_1(1+r)^{k-1}$$

(3)より $A_0=0$　また，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{i} A_1(1+r)^{k-1} = \frac{A_1\left\{(1+r)^i - 1\right\}}{(1+r)-1} = \frac{A_1\left\{(1+r)^i - 1\right\}}{r}$

よって，$S_i = \dfrac{A_1\left\{(1+r)^i - 1\right\}}{r}$　…(5)

(2)より，$S_n = B$ から，

$$S_n = \frac{A_1\left\{(1+r)^n - 1\right\}}{r} = B$$

この式より，初項 A_1 を表すことができる．

$$A_1 = \frac{rB}{(1+r)^n - 1}$$ （右辺は全て定数）…(6)

これを(4)の $A_i = A_1(1+r)^{i-1}$ に代入して，

$$\underline{A_i = \frac{rB}{(1+r)^n - 1}(1+r)^{i-1}}$$ （右辺は全て定数で，漸化式の解を表す）

これ及び(5)の $S_i = \dfrac{A_1\left\{(1+r)^i - 1\right\}}{r}$ を，(1)の $x = r(B - S_{i-1}) + A_i$ に代入して，

$$x = r\left[B - \frac{A_1\left\{(1+r)^{i-1} - 1\right\}}{r}\right] + \frac{rB}{(1+r)^n - 1}(1+r)^{i-1}$$

$$= rB - A_1\left\{(1+r)^{i-1} - 1\right\} + \frac{rB}{(1+r)^n - 1}(1+r)^{i-1}$$

これに，(6)の $A_1 = \dfrac{rB}{(1+r)^n - 1}$ を代入し，

$$x = rB - \frac{rB}{(1+r)^n - 1}\left\{(1+r)^{i-1} - 1\right\} + \frac{rB}{(1+r)^n - 1}(1+r)^{i-1}$$

$$= rB + \frac{rB}{(1+r)^n - 1}\left\{(1+r)^{i-1} - (1+r)^{i-1} + 1\right\}$$

$$= rB + \frac{rB}{(1+r)^n - 1} = rB\left(1 + \frac{1}{(1+r)^n - 1}\right)$$

$$= rB\left(\frac{(1+r)^n - 1 + 1}{(1+r)^n - 1}\right) = rB\left(\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right)$$

よって，x をすべて定数で表すことができ，$\boxed{x = B\left(\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right)}$ （終）

2.4　漸化式の結果の確認

この式を利用すれば，どんなｎにおいても，毎期の返済金額をすぐ示すことができる．仮に，最初の問題と同じ，$B = 1000000, r = 0.05, n = 3$ の条件を代入すると，$x = 367208.5646\cdots$ となり，最初に行った連立方程式による求め方の結果（本論文３ページ参照）と同じ結論が得られる．