2007年度 秋学期 数理ファイナンス
第3回 レポート

株式と割引債の一期間二項モデル

早稲田大学 商学部
商業･貿易･金融コース 4年

平成１９年１０月２７日

河野愛一朗
(1F040402-8)

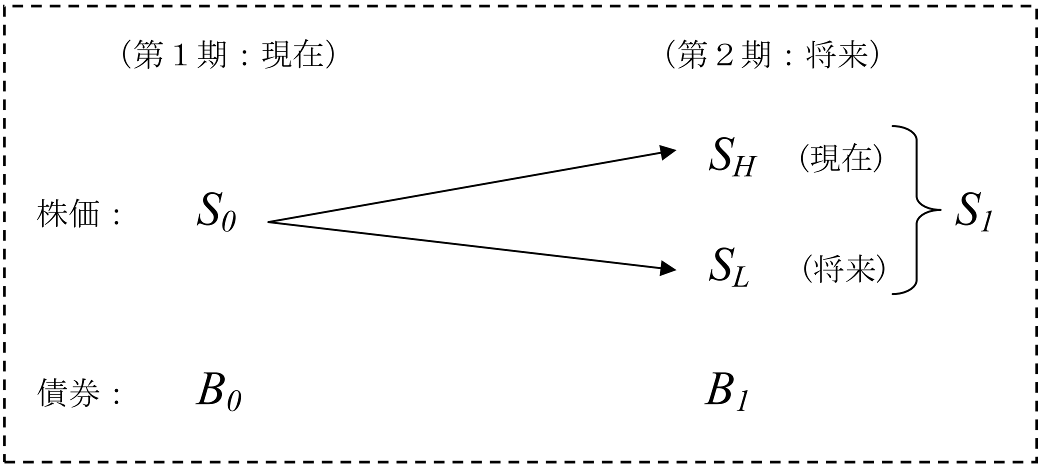
目次

０．概要

本レポートでは、以下の場合のオプションについて考察する。

> 現在株価 S_0，将来株価 $S_1 = S_H$（好況時）または $S_1 = S_L$（不況時）
> 現在債券価格 B_0，将来債券価格 B_1

これを、図示したものが以下の図である。



以降、好況時の株価は、不況時の株価よりも高いことは自明とみなして、考える。（つまり、$S_H > S_L$）

１．行使価格 *K* のヨーロピアン・コール・オプションの現在価格

コール･オプションとは､株券を行使価格 K で買うことができる権利である。つまり、行使価格が株価よりも安いときに初めて意味を持つことになる。このオプションの将来価格を C_1 とすれば、

$$C_1 = max\{ S_1 - K, 0\}$$ が成立する。

そこで、これと同じ価値を持つポートフォリオを考え、それが、債券 x 枚、株券 y 枚から構成されるとする。

i 期におけるポートフォリオの価値は、$S_i x + B_i y \quad (i = 0,1)$ であり、これがオプションの価値と同じと見なせば、

$$C_i = S_i x + B_i y \quad (i = 0,1)$$ が成立する　　　…（１）

①$S_H \geq K \geq S_L$ のとき、

まず、第１期（将来）において考える。

（イ）　好況時：$S_1 = S_H$ ならば、

$C_1 = max\{ S_1 - K, 0\} = max\{ S_H - K, 0\}$　　$S_H \geq K$ より、$S_H - K \geq 0$ から、
$C_1 = S_H - K$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_H x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_H x + B_1 y = S_H - K$　が成立する。　　…（２）

（ロ）　　**不況時：$S_1 = S_L$ ならば、**

$C_1 = max\{S_1 - K, 0\} = max\{S_L - K, 0\}$
$S_L \leq K$ より、$S_L - K \leq 0$ から、$C_1 = 0$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_L x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_L x + B_1 y = 0$　が成立する。　　…（３）

（イ）（ロ）より、（２）及び（３）の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} S_H x + B_1 y = S_H - K \\ S_L x + B_1 y = 0 \end{cases}$$

これを x, y について解くと、

$$x = \frac{S_H - K}{S_H - S_L}, \ y = -\frac{(S_H - K)S_L}{B_1(S_H - S_L)}$$ となる。

（１）より、これを０期における $C_0 = S_0 x + B_0 y$ に代入して、整理すると、

$$C_0 = -\frac{S_0(K - S_H)}{S_H - S_L} + \frac{B_0 S_L (K - S_H)}{B_1(S_H - S_L)} = (S_0 - \frac{B_0}{B_1} S_L)\frac{S_H - K}{S_H - S_L}$$

②$K \geq S_H \geq S_L$ のとき、

まず、第１期（将来）において考える。

（イ）　　**好況時：$S_1 = S_H$ ならば、**

$C_1 = max\{S_1 - K, 0\} = max\{S_H - K, 0\}$
$S_H \leq K$ より、$S_H - K \leq 0$ から、$C_1 = 0$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_H x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_H x + B_1 y = 0$　が成立する。　　…（４）

（ロ）　　不況時：$\boldsymbol{S_1 = S_L}$ ならば、

$C_1 = max\{S_1 - K, 0\} = max\{S_L - K, 0\}$　　$S_L \leq K$ より、$S_L - K \leq 0$ から、①の（ロ）とまったく同じである。よって、$C_1 = 0$ から $S_L x + B_1 y = 0$　が成立する。　　…（５）

<u>（イ）（ロ）より、（４）及び（５）の連立方程式を解けばよい。</u>

$$\begin{cases} S_H x + B_1 y = 0 \\ S_L x + B_1 y = 0 \end{cases}$$

これを x, y について解くと、

$$\underline{x = 0, y = 0}$$　となる。

（１）より、これを０期における $C_0 = S_0 x + B_0 y$ に代入して、整理すると、

$$\underline{C_0 = 0}$$

$\boxed{③ S_H \geq S_L \geq K \text{ のとき、}}$

まず、第１期（将来）において考える。

（イ）　　好況時：$\boldsymbol{S_1 = S_H}$ ならば、

$C_1 = max\{S_1 - K, 0\} = max\{S_H - K, 0\}$　　$S_H \geq K$ より、$S_H - K \geq 0$ から、①の（イ）とまったく同じである。よって、$C_1 = S_H - K$ から $S_H x + B_1 y = S_H - K$ が成立する。　　…（６）

（ロ）　　不況時：$\boldsymbol{S_1 = S_L}$ ならば、

$C_1 = max\{S_1 - K, 0\} = max\{S_L - K, 0\}$　　$S_L \geq K$ より、$S_L - K \geq 0$ から、
$C_1 = S_L - K$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_L x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_L x + B_1 y = S_L - K$ 　が成立する。　　　…（７）

<u>（イ）（ロ）より、（６）及び（７）の連立方程式を解けばよい。</u>

$$\begin{cases} S_H x + B_1 y = S_H - K \\ S_L x + B_1 y = S_L - K \end{cases}$$

これを x, y について解くと、

$$\underline{x = 1, y = -\frac{K}{B_1}}$$ 　となる。

（１）より、これを０期における $C_0 = S_0 x + B_0 y$ に代入して、整理すると、

$$\underline{C_0 = -\frac{B_0}{B_1} K + S_0}$$

以上、①、②、③をまとめると、

①$S_H \geq K \geq S_L$ のとき、

$$\underline{C_0 = (S_0 - \frac{B_0}{B_1} S_L) \frac{S_H - K}{S_H - S_L}}$$

②$K \geq S_H \geq S_L$ のとき、

$$\underline{C_0 = 0}$$

③$S_H \geq S_L \geq K$ のとき、

$$\underline{C_0 = S_0 - \frac{B_0}{B_1} K}$$

（これは負である。詳しくは１１ページを参照）

２．行使価格 $\boldsymbol{K}$ のヨーロピアン・プット・オプションの現在価格

プット･オプションとは、株券を行使価格 K で売ることができる権利である。つまり、行使価格が株価よりも高いときに初めて意味を持つことになる。このオプションの将来価格を C_1 とすれば、

$$C_1 = \max\{K - S_1, 0\}$$ が成立する。

そこで、これと同じ価値を持つポートフォリオを考え、それが、債券 x 枚、株券 y 枚から構成されるとする。

i 期におけるポートフォリオの価値は、$S_i x + B_i y \quad (i = 0,1)$ であり、これがオプションの価値と同じと見なせば、

$$C_i = S_i x + B_i y \quad (i = 0,1)$$ が成立する　　…(１)

①$S_H \geq K \geq S_L$ のとき、

まず、第１期（将来）において考える。

（イ）好況時：$\boldsymbol{S_1 = S_H}$ ならば、

$C_1 = \max\{K - S_1, 0\} = \max\{K - S_H, 0\}$　　$S_H \geq K$ より、$K - S_H \leq 0$ から、
$C_1 = 0$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_H x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_H x + B_1 y = 0$　が成立する。　　…（２）

（ロ）不況時：$\boldsymbol{S_1 = S_L}$ ならば、

$C_1 = \max\{K - S_1, 0\} = \max\{K - S_L, 0\}$
$S_L \leq K$ より、$K - S_L \geq 0$ から、$C_1 = K - S_L$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_L x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_L x + B_1 y = K - S_L$　が成立する。　　　…（３）

<u>（イ）（ロ）より、（２）及び（３）の連立方程式を解けばよい。</u>

$$\begin{cases} S_H x + B_1 y = 0 \\ S_L x + B_1 y = K - S_L \end{cases}$$

これを x, y について解くと、

$$\underline{x = -\frac{K - S_L}{S_H - S_L}, y = \frac{S_H (K - S_L)}{B_1 (S_H - S_L)}}$$　となる。

（１）より、これを０期における $C_0 = S_0 x + B_0 y$ に代入して、整理すると、

$$\underline{C_0 = -\frac{S_0 (K - S_L)}{S_H - S_L} + \frac{B_0 S_H (K - S_L)}{B_1 (S_H - S_L)} = \left(\frac{B_0}{B_1} S_H - S_0\right) \frac{K - S_L}{S_H - S_L}}$$

② $K \geq S_H \geq S_L$ のとき、

まず、第１期（将来）において考える。

（イ）好況時：$S_1 = S_H$ ならば、

$C_1 = \max\{ K - S_1, 0 \} = \max\{ K - S_H, 0 \}$
$S_H \leq K$ より、$K - S_H \geq 0$ から、$C_1 = K - S_H$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_H x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_H x + B_1 y = K - S_H$　が成立する。　　　…（４）

（ロ）不況時：$S_1 = S_L$ ならば、

$C_1 = \max\{K - S_1, 0\} = \max\{K - S_L, 0\}$　　$S_L \le K$ より、$K - S_L \ge 0$ から、①の（ロ）とまったく同じである。よって、$C_1 = 0$ から $S_L x + B_1 y = K - S_L$　が成立する。　　…（５）

<u>（イ）（ロ）より、（４）及び（５）の連立方程式を解けばよい。</u>

$$\begin{cases} S_H x + B_1 y = K - S_H \\ S_L x + B_1 y = K - S_L \end{cases}$$

$\vec{\ }$　$\vec{\ }$

これを x, y について解くと、

$$\underline{x = -1, y = \frac{K}{B_1}}$$　となる。

（１）より、これを０期における $C_0 = S_0 x + B_0 y$ に代入して、整理すると、

$$\underline{C_0 = \frac{B_0}{B_1} K - S_0}$$

$\boxed{③ S_H \ge S_L \ge K \text{ のとき、}}$

まず、第１期（将来）において考える。

（イ）好況時：$S_1 = S_H$ ならば、

$C_1 = \max\{K - S_1, 0\} = \max\{K - S_H, 0\}$　　$S_H \ge K$ より、$K - S_H \le 0$ から、①の（イ）と全く同じである。よって、$C_1 = S_H - K$ から $S_H x + B_1 y = 0$　が成立する。　　…（６）

（ロ）不況時：$\boldsymbol{S_1 = S_L}$ ならば、

$C_1 = \max\{K - S_1, 0\} = \max\{K - S_L, 0\}$　　$S_L \geq K$ より、$K - S_L \leq 0$ から、
$C_1 = S_L - K$

このとき、ポートフォリオの価値は、$S_L x + B_1 y$ であり、（１）より、
$S_L x + B_1 y = 0$　が成立する。　　…（７）

（イ）（ロ）より、（６）及び（７）の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} S_H x + B_1 y = 0 \\ S_L x + B_1 y = 0 \end{cases}$$

これを x, y について解くと、

$$\underline{x = 0, y = 0}$$ となる。

（１）より、これを０期における $C_0 = S_0 x + B_0 y$ に代入して、整理すると、

$$\underline{C_0 = 0}$$

以上、①、②、③をまとめると、

①$S_H \geq K \geq S_L$ のとき、

$$C_0 = \left(\frac{B_0}{B_1} S_H - S_0\right) \frac{K - S_L}{S_H - S_L}$$

②$K \geq S_H \geq S_L$ のとき、

$$C_0 = \frac{B_0}{B_1} K - S_0$$

（これは負である。詳しくは１１ページを参照）

③$S_H \geq S_L \geq K$ のとき、

$$C_0 = 0$$

３．金利の導入とオプション価格の正負

債権イールドを r とすれば、$B_1 = (1+r)B_0$ である。∴　$\dfrac{B_0}{B_1} = \dfrac{1}{1+r}$

これを利用すれば、結果が解釈しやすくなる。

（１）$S_H \geq K \geq S_L$ のとき、

<u>コール・オプションの場合では、</u>

$$C_0 = \left(S_0 - \frac{1}{1+r} S_L \right) \frac{S_H - K}{S_H - S_L}$$

$S_H \geq K \geq S_L$ より、$S_H \geq K$ かつ $S_H \geq S_L$ から $\dfrac{S_H - K}{S_H - S_L} > 0$　…（１）

また、１期の株価の現在価値：$\dfrac{1}{1+r} S_H$（好況時），$\dfrac{1}{1+r} S_L$（不況時）の間に０期の株価があるとすれば、$S_0 \geq \dfrac{1}{1+r} S_L$　よって、$S_0 - \dfrac{1}{1+r} S_L \geq 0$　…（２）

∴（１）かつ（２）より　$\underline{C_0 \geq 0}$

<u>プット・オプションの場合では、</u>

$$C_0 = \left(\frac{1}{1+r} S_H - S_0 \right) \frac{K - S_L}{S_H - S_L}$$

$S_H \geq K \geq S_L$ より、$K \geq S_L$ かつ $S_H \geq S_L$ から $\dfrac{K - S_L}{S_H - S_L} > 0$　…（３）

また、１期の株価の現在価値：$\dfrac{1}{1+r} S_H$（好況時），$\dfrac{1}{1+r} S_L$（不況時）の間に０期の株価があるとすれば、$\dfrac{1}{1+r} S_H \geq S_0$　よって、$\dfrac{1}{1+r} S_H - S_0 \geq 0$　…（４）

∴（３）かつ（４）より　$\underline{C_0 \geq 0}$

（２）$K \geq S_H \geq S_L$ のとき、（コール・オプションの場合）

$$\underline{C_0 = -\left(\frac{1}{1+r}K - S_0\right)}$$

１．と同様、$\frac{1}{1+r}S_H \geq S_0 \geq \frac{1}{1+r}S_L$ かつ $K \geq S_H \geq S_L$ が成立。

よって、$\frac{1}{1+r}K \geq \frac{1}{1+r}S_H \geq S_0 \geq \frac{1}{1+r}S_L$　ゆえに、$\frac{1}{1+r}K - S_0 > 0$ から、$\underline{C_0 < 0}$

価格は負であり、実際にはこれをコール・オプションとは呼べない。

（３）$S_H \geq S_L \geq K$ のとき、（プット・オプションの場合）

$$\underline{C_0 = -\left(S_0 - \frac{1}{1+r}K\right)}$$

１．と同様、$\frac{1}{1+r}S_H \geq S_0 \geq \frac{1}{1+r}S_L$ かつ $S_H \geq S_L \geq K$ が成立。

よって、$\frac{1}{1+r}S_H \geq S_0 \geq \frac{1}{1+r}S_L \geq \frac{1}{1+r}K$　ゆえに、$S_0 - \frac{1}{1+r}K > 0$ から、$\underline{C_0 < 0}$

価格は負であり、実際にはこれをプット・オプションとは呼べない。